

Chapitre 9 - GM

GLOSSAIRE MATHÉMATIQUE

EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

- GM_01 Dessin schématisant le contrôle de la rectitude d'une règle
- GM_02 Dessin schématisant le contrôle de l'alignement de billes
- GM_03 Dessin schématisant le contrôle de la planéité d'une planchette
- GM_04 Contrôle du parallélisme de deux bâtons
- GM_05 Plan engendré par deux droites
- GM_06 Droite qui s'appuie sur deux droites
- GM_07 Plan engendré par une droite et un point ; porte qui tourne
- GM_08 Intersection de trois plans
- GM_09 Pivotement d'une équerre autour de l'un de ses côtés
- GM_10 Plan fixe et plan pivotant ; cas particulier des plans perpendiculaires
- GM_11 Construction du projeté orthogonal d'un point sur un plan
- GM_12 Droite de bout et plan de bout
- GM_13 D'une perspective centrale à une perspective cavalière
- GM_14 La tour octogonale de Lérida
- GM_15 Prisme droit régulier octogonal et sa surface prismatique
- GM_16 Prismes réguliers à 5, 6, 7 et 8 faces latérales
- GM_17 Prismes réguliers : aspects différents selon la position de l'observateur
- GM_18 Pyramides

GM_01

Dessin schématisant le contrôle de la rectitude d'une règle *Règle à section carrée*

Deux commandes

Description de la fenêtre

- **A gauche**, un schéma de profil montre l'œil de l'observateur et la règle que l'observateur déplace dans le plan vertical du dessin.

- **A droite**, un dessin montre comment la règle peut être vue par l'observateur.

Lorsque l'observateur se place de façon à voir une arête longue de la règle et qu'il voit celle-ci selon un segment, c'est que cette arête est rectiligne. Sinon, il voit cette arête comme un petit arc de courbe.

Description des commandes

Les deux dessins sont synchronisés.

- La **première commande** « **position de la règle** » permet de déplacer la règle par rapport à l'observateur.
- La **seconde commande** « **gauchissement** » permet de tordre ou de redresser la règle.

GM_02

Dessin schématisant le contrôle de l'alignement de billes

Deux commandes

Description de la fenêtre

- **A gauche**, un schéma de profil montre l'œil de l'observateur et quatre billes posées sur un plan horizontal.

- **A droite**, un dessin montre comment les billes peuvent être vues par l'observateur.

Description des commandes

Les deux dessins sont synchronisés.

- La **première commande « position des billes »** permet de déplacer les billes pour les aligner ou non.
- La **seconde commande « position de l'observateur »** permet de déplacer l'observateur par rapport au plan horizontal.

GM_03

Dessin schématisant le contrôle de la planéité d'une planchette

Deux commandes

Description de la fenêtre

- **A gauche**, un schéma de profil montre l'œil de l'observateur et la planchette.
- **A droite**, un dessin montre comment la planchette peut être vue par l'observateur.

Description des commandes

Les deux dessins sont synchronisés.

- La **première commande** permet de modifier le « **gauchissement de la planchette** ».
- La **seconde commande** permet de déplacer la « **position de la planchette** » par rapport à l'observateur.

Si la planchette est plane (ou presque), il existe une position pour laquelle l'observateur voit le bord proche de lui et ne voit ni la surface supérieure ni la surface inférieure de la planchette. Si la planchette est vraiment gauche, l'observateur ne peut pas masquer la planchette derrière le bord antérieur.

GM_04

Contrôle du parallélisme de deux bâtons

Deux commandes et une animation

Description de la fenêtre à l'ouverture

A droite, la fenêtre montre une ellipse représentant un cercle donné dans le plan horizontal passant par les milieux de deux bâtons de même longueur. Le bâton noir est vertical ; le bâton bleu, situé dans un plan vertical de bout, a une position réglable – verticale ou en biais.

Un observateur, représenté par une tête ronde munie d'un nez, regarde les deux bâtons ; il peut se déplacer sur le cercle représenté.

Au milieu, sont représentés les bâtons tels que les voit l'observateur (cf. dessin de droite).

A gauche, deux commandes et une animation :

- commande de configuration : basculement du bâton bleu dans un plan vertical de bout
- commande de position : position en hauteur de l'observateur
- animation : déplacement de l'observateur autour des bâtons.

Utilisation des commandes et de l'animation

Le dessin du milieu montre ce que voit l'observateur ; il est synchronisé avec les commandes et avec le dessin de droite.

A l'ouverture de la fenêtre, l'œil de l'observateur est dans le plan horizontal qui contient les milieux des bâtons ; il est en face de ces bâtons et les voit parallèles.

Comment contrôler le parallélisme de deux bâtons

Dans la position initiale, l'observateur voit les deux bâtons parallèles, qu'ils le soient ou non. L'observateur ne peut conclure immédiatement à leur parallélisme réel ; c'est en se déplaçant par rapport aux bâtons qu'il pourra conclure.

Ce que voit l'observateur dépend à la fois de sa position par rapport aux bâtons et de la configuration de ces bâtons (bâton bleu en biais, bâton bleu vertical).

1. Bâton bleu en biais (commande de configuration)

a) L'observateur est placé « à l'horizontale » (commande de position)

L'œil de l'observateur est dans le plan horizontal contenant les milieux des bâtons.

L'animation fait tourner l'observateur autour des bâtons.

En général, l'observateur voit des bâtons non parallèles. Cependant, dans les deux cas où l'observateur est situé dans le plan de bout initial, il voit deux bâtons parallèles.

b) L'observateur est placé « au-dessus » (commande de position)

L'œil de l'observateur est « à la verticale des bâtons ».

L'observateur voit un point et un segment pour tout déplacement à l'aide de l'animation.

c) L'observateur est placé en position intermédiaire (commande de position)

L'œil de l'observateur est dans un autre plan horizontal.

L'animation fait tourner l'observateur autour des bâtons ; il voit des bâtons non parallèles, sauf pour des positions particulières de l'observateur où les bâtons sont vus parallèles et de longueurs différentes.

2. Bâton bleu vertical (commande de configuration)

Les deux bâtons sont parallèles.

a) A l'exception du cas où « l'observateur est placé au-dessus » (commande de position), l'animation fait tourner l'œil de l'observateur autour des bâtons dans un plan horizontal. Pour toute position au cours de ce déplacement, l'observateur voit les bâtons parallèles et de même longueur.

b) « L'observateur est placé au-dessus » (commande de position)

Au cours de l'animation, l'observateur voit dans tous les cas deux points correspondant aux deux bâtons.

Remarque

La tête de l'observateur est munie d'un nez permettant de repérer la direction du regard. Cependant les dessins montrant ce que voit l'observateur sont réalisés en supposant cet observateur très éloigné des bâtons. Cette grande distance ne peut être respectée sur le schéma de droite en perspective cavalière.

GM_05

Plan engendré par deux droites

Quatre commandes

Description de la fenêtre et des commandes

- **A droite**, le dessin montre une portion rectangulaire de plan en projection orthogonale. Cette portion de plan contient un segment rouge s'appuyant sur deux segments noirs (représentant des droites).

- **A gauche**

Les commandes de position permettent de faire varier la position du plan par rotation ou basculement.

Les commandes de configuration permettent d'agir sur la position relative des deux droites noires et d'observer le balayage du plan par la droite rouge.

GM_06

Droite qui s'appuie sur deux droites

Deux commandes et une animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

La figure, dessinée en projection orthogonale, contient un cercle schématisant l'œil de l'observateur et sa pupille ainsi qu'une droite noire et une droite bleue. L'observateur regarde dans une direction où, pour lui, la droite noire et la droite bleue semblent se croiser.

Description des commandes

Les commandes « **pivotement** » et « **basculement** » sont destinées à vérifier que les deux droites représentées ne sont pas sécantes.

Déroulement de l'animation

L'**animation** a pour objectif de matérialiser le rayon lumineux qui passe par la pupille et s'appuie sur chacune des deux droites, afin de mettre en évidence les points d'intersection du rayon lumineux avec chacune des deux droites.

A partir de la pupille se développe un rectangle de l'espace représentant le plan contenant la pupille et la droite bleue ; ce plan coupe la droite noire et le rayon lumineux apparaît.

A la fin du parcours, le rectangle se rétracte ; restent les deux droites et le rayon lumineux.

GM_07

Plan engendré par une droite et un point

Porte qui tourne

Deux commandes

Description de la fenêtre et des commandes

A l'ouverture, le dessin représente en projection orthogonale un pan de mur et une porte fermée.

La **première commande** permet de faire tourner la porte autour de l'axe de ses gonds ; la porte peut faire un tour complet en traversant le mur.

La **deuxième commande** fait basculer l'ensemble « mur et porte » pour modifier le point de vue.

GM_08

Intersection de trois plans

Deux commandes et une animation Aller Retour

Description de la fenêtre

A droite, la fenêtre présente une figure en projection parallèle représentant trois plans – bleu, vert, rouge. Le dessin n'est pas ponctué.

A gauche :

- La commande « **pivotement** » permet de faire pivoter l'ensemble des trois plans ; on peut aussi imaginer que l'observateur tourne autour de l'ensemble des trois plans
- La commande « **basculement** » permet de faire basculer l'ensemble des trois plans ; on peut aussi imaginer que l'observateur se déplace en hauteur au-dessus de l'ensemble des trois plans.

En bas, une animation aller et retour.

Déroulement de l'animation

- A l'ouverture, les trois plans sont parallèles. On peut supposer qu'ils sont verticaux.
- Le plan vert pivote autour de l'une de ses droites, axe qui n'est pas représenté. Le plan vert coupe alors les deux autres plans suivant deux droites – noires – parallèles à l'axe du pivotement.
- Le plan vert s'arrête dans la position qu'il conservera jusqu'à la fin du parcours.
- Le plan bleu pivote autour de son intersection avec le plan vert ; son intersection avec le plan rouge apparaît en noir. Les trois plans se coupent deux à deux suivant trois droites parallèles entre elles.
- Le plan bleu pivote autour de l'une de ses droites, qui est représentée et peut être supposée horizontale.

Dès lors, les trois droites noires sont concourantes : le point de concours va être mis en évidence par le mouvement du plan bleu suivi du mouvement du plan rouge autour de l'une de ses droites, supposée horizontale.

En fin de parcours, aucun des trois plans n'a conservé sa position initiale, mais le plan vert est resté vertical.

GM_09

Pivotement d'une équerre autour de l'un de ses côtés

Une animation en boucle

Description de la fenêtre et déroulement de l'animation

A l'ouverture, le dessin montre en perspective parallèle un plan horizontal et un point dans ce plan. La liste des différentes étapes de l'animation est affichée.

- Au démarrage de l'animation, à partir du point marqué se dessine le grand côté de l'équerre en même temps que la verticale verte associée au dernier point tracé. Le grand côté de l'équerre n'est pas vertical : il ne coïncide pas avec la verticale verte issue de l'extrémité non située dans le plan. Le dessin complet de l'équerre apparaît et l'angle droit est marqué.

- On fait tourner l'équerre en choisissant le grand côté comme pivot : l'équerre ne peut effectuer qu'un demi-tour au-dessus du plan horizontal car le pivot n'est pas vertical.

- Une deuxième équerre de mêmes dimensions apparaît : son petit côté est situé dans le plan horizontal et les deux équerres ont un sommet commun extérieur au plan.

Le déplacement de la deuxième équerre est réalisé en faisant glisser le petit côté dans le plan horizontal - tout en gardant le sommet commun - de manière à faire coïncider les grands côtés des deux équerres, ce qui entraîne le redressement du pivot de la première équerre.

- L'équerre peut alors effectuer un tour complet : le pivot est orthogonal à toutes les droites du plan.

GM_10

Plan fixe et plan pivotant ; cas particulier des plans perpendiculaires

Deux commandes

Description de la fenêtre

Le dessin représente, en projection orthogonale, deux plans (l'un rouge, l'autre bleu) munis chacun d'une demi-droite perpendiculaire. L'intersection des deux plans est la droite noire.

A l'ouverture, la demi-droite bleue est contenue dans le plan rouge et la demi-droite rouge est contenue dans le plan bleu. Chacun des plans contient la demi-droite droite perpendiculaire à l'autre : les deux plans sont perpendiculaires.

Description des commandes

Le plan bleu est fixe.

La commande « **rotation** » permet de faire tourner le plan rouge autour de la droite noire d'intersection, et de mettre en évidence les deux positions particulières de la commande pour lesquelles les deux plans sont perpendiculaires.

La commande « **basculement** » permet d'obtenir différents aspects de l'ensemble de la figure.

Lorsque la commande « rotation » est placée dans l'une des deux positions pour lesquelles les deux plans sont perpendiculaires, une position particulière de la commande « basculement » permet de « voir » la perpendicularité des deux plans.

GM_11

Construction du projeté orthogonal d'un point sur un plan

Animation en boucle

Fenêtre à l'ouverture

A l'ouverture, la fenêtre montre un plan dessiné en perspective parallèle et le programme de construction à réaliser.

Déroulement de l'animation

Un point de l'espace apparaît ; l'objectif est de construire le projeté orthogonal de ce point sur le plan.

On dessine deux segments noirs du plan de directions différentes.

- On place un côté de l'angle droit d'une équerre sur l'un des deux segments noirs ; puis on fait glisser l'équerre sur ce segment en l'inclinant de façon à faire passer son deuxième côté par le point donné.
- On fait pivoter l'équerre autour du segment noir du plan jusqu'à la mettre sur le plan.
- On trace en rouge le segment du plan déterminé par le deuxième côté de l'équerre.

On réalise la même manipulation sur le deuxième segment noir pour obtenir le deuxième segment rouge tracé dans le plan.

Le projeté cherché est le point d'intersection des deux segments rouges, comme le montre la fin de l'animation.

GM_12

Droite de bout et plan de bout

Animation en boucle

Description de la fenêtre et déroulement de l'animation

A l'ouverture, la fenêtre montre une représentation du plan frontal de projection.

Au démarrage de l'animation, une droite de bout apparaît.

Puis se dessine un plan contenant cette droite : c'est un plan de bout en biais.

Ce plan pivote alors autour de la droite de bout : il passe par la position verticale pour aller à la position horizontale.

GM_13

D'une perspective centrale à une perspective parallèle

À reculons vers l'infini et retour

Animation Aller Retour

Description de la fenêtre à l'ouverture

À l'ouverture, la fenêtre montre au spectateur (nous) à la fois l'œil d'un observateur et le dessin, fait par cet observateur, d'un cube en perspective centrale. L'œil de l'observateur est le centre de la perspective.

Déroulement de l'animation

Le cube de l'espace est fixe et l'observateur se déplace à reculons vers l'infini (vers le haut et vers la droite).

Le dessin situé à gauche est la représentation du cube dans la perspective centrale dont le centre est l'œil de l'observateur. Cette perspective et le dessin qui en résulte se modifient en fonction du déplacement de l'œil de l'observateur.

Quand l'observateur est "à l'infini", la perspective centrale est remplacée par une perspective parallèle.

GM_14

La tour octogonale de Lérida

Une commande

Description de la fenêtre

La photo présentée à droite montre le clocher octogonal de la cathédrale de Lérida (Catalogne) datant du XIV^e siècle. Les arêtes verticales de la partie prismatique sont soulignées en bleu. La commande est à gauche de la photo.

La photo ci-dessous montre l'autre côté de cet édifice.



Description de la commande

Les octogones à la base et au sommet sont facilement repérables.

La commande permet, en déplaçant le curseur vers le bas, de faire apparaître simultanément les lignes de fuite de deux côtés parallèles, à gauche comme à droite : les points de fuite correspondants sont voisins des points de distance. Ces points seraient exactement les points de distance si la figure dessinée était symétrique. La ligne d'horizon apparaît en rouge.

Ce document est réalisé avec le logiciel GeoGebra.

Son aspect est différent de celui des documents réalisés avec Cabri. En particulier, veiller à ne pas déplacer la photo par mégarde ; si la photo est déplacée, demander au navigateur de *recharger ou de réactualiser la page*.

GM_15

Prisme droit régulier octogonal et sa surface prismatique

Une animation et une commande

15a Prisme droit régulier octogonal opaque

Description de la fenêtre

Le dessin représente, en projection orthogonale, un prisme droit dont la base est un octogone régulier. Le prisme est opaque.

Animation et description de la commande

L'**animation** « **rotation** » permet de faire **tourner** le prisme autour de son axe.

La **commande** permet de faire **basculer** le prisme entre deux positions :

- l'une correspondant à l'axe du prisme parallèle au plan de projection,
- l'autre correspondant à l'axe du prisme perpendiculaire au plan de projection.

En fin de basculement, on voit apparaître un octogone fixe avec représentation et mesure des angles.

15b Surface prismatique régulière octogonale

Le dessin représente, en projection orthogonale, la surface prismatique associée au prisme droit régulier octogonal du 15a .

GM_16

Prismes réguliers à 5, 6, 7 et 8 faces latérales

Une animation et une commande

GM_16 est un prolongement de GM_15

Description de la fenêtre

Le dessin représente, en projection orthogonale, quatre prismes droits réguliers à 5, 6, 7 et 8 faces latérales. Ces prismes tournent sur eux-mêmes simultanément.

A l'ouverture, chacun des prismes a son axe légèrement en biais et présente une arête en avant.

Animation et commande

L'**animation** « **rotation** » permet de faire **tourner** les prismes simultanément, chacun autour de son axe.

La **commande** « **basculement** » permet de faire **basculer** les axes des quatre prismes.

GM_17

Prismes réguliers : aspects différents selon la position de l'observateur

Cinq commandes

Description de la fenêtre et des commandes

Le dessin présente quatre prismes réguliers dont l'axe est parallèle au plan de projection.

La commande « **face, arête** » située à gauche permet de présenter simultanément à l'observateur chacun des prismes avec le choix d'une face ou d'une arête en avant.

Chacune des quatre commandes « **vu de près, vu de loin** » permet de placer l'observateur en face de chaque prisme, dans une position très proche ou très éloignée.

Le nombre d'arêtes ou de faces visibles permet d'identifier chacun des prismes.

GM_18

Pyramides

Une commande et une animation

Description de la fenêtre

La fenêtre présente les dessins de deux pyramides opaques :

- la première a pour base un pentagone convexe quelconque
- la seconde a pour base un hexagone régulier.

Pour chacune des pyramides, la hauteur et son pied sont représentés.

Animation et commande

L'**animation « rotation »** fait tourner chaque pyramide autour de sa hauteur.

La **commande « basculement »** permet de de faire **basculer** simultanément les deux pyramides jusqu'à obtenir des vues de dessus.