

Chapitre 8 - RM

REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE DE L'ESPACE

RM_01	Projection parallèle et projection centrale
RM_02	Alignement de dix cubes : projection centrale, projection parallèle
RM_03	Le champ en projection parallèle
RM_04	Le champ en projection centrale
RM_05	Projection parallèle : image d'une droite pivotant autour d'un point
RM_06	Projection centrale : image d'une droite pivotant autour d'un point
RM_07	Perspective parallèle : dessin d'une droite
RM_08	Perspective centrale : dessin d'une droite et de son point de fuite
RM_09	Perspective parallèle : dessin de deux droites parallèles
RM_10	Perspective centrale : dessin de deux droites parallèles
RM_11	Image d'un objet plan parallèle au plan de projection
RM_12	Construction du dessin d'un cube en perspective parallèle
RM_13	Construction du dessin d'un cube en perspective centrale
RM_14	Influence du point de fuite sur le dessin d'un cube déterminé par trois arêtes (perspective centrale)
RM_15	Cube en perspective parallèle et en perspective centrale
RM_16	Rapport de longueurs sur une fuyante
RM_17	Perspective centrale : points de distance
RM_18	Perspective centrale : construction d'un carrelage (1)
RM_19	Perspective centrale : construction d'un carrelage (2)
RM_20	Construction sur un dessin en perspective centrale
RM_21	De la vue de face à la vue de côté de deux sphères
RM_22	Les trois vues d'un objet "pointe"
RM_23	Une "pointe" animée
RM_24	Les trois vues d'une "pointe" opaque
RM_25	Découpe de l'objet "pointe" dans un cylindre
RM_26	Géométrie descriptive
RM_27	Une pointe se déplace
RM_28	Rayons lumineux éclairant une sphère
RM_29	Le contour apparent d'une sphère en projection centrale
RM_30	Images d'une sphère variable par projections centrales
RM_31	Le contour apparent d'une sphère en projection parallèle
RM_32	Les cubes sortent de l'ombre

RM_01

Projection parallèle et projection centrale

Animation en boucle

Description de la fenêtre

A l'ouverture, un dessin en perspective parallèle montre un plan horizontal, un plan vertical et un triangle rouge repéré par rapport au plan horizontal par trois segments verticaux qui "supportent" le triangle par ses sommets (l'un d'eux nommé A). Le plan vertical est le plan sur lequel le triangle sera projeté en projection parallèle et en projection centrale.

Déroulement de l'animation

L'animation montre la construction des images du triangle dans les deux projections successives ; les images sont dessinées en vert dans la projection parallèle, en bleu dans la projection centrale.

A la fin de chaque projection, la caractéristique de cette projection reste apparente : la direction des projetantes pour la projection parallèle, le centre pour la projection centrale.

Notons que le dessin a été réalisé en choisissant comme direction de la projection parallèle la direction de la projetante de A dans la projection centrale.

En fin d'animation, les deux images restent dessinées ainsi que les caractéristiques des deux projections.

RM_02

Alignement de dix cubes : projection centrale, projection parallèle

Présentation simultanée

Animation en boucle

Description de la fenêtre et déroulement de l'animation

Première étape

Les deux dessins d'un même cube, à gauche en projection centrale et à droite en projection parallèle, apparaissent successivement côte à côte.

La face avant du cube est parallèle au plan de projection, supposé frontal. Les segments épaissis en rouge représentent dans les deux projections l'arête supérieure gauche (en position de bout). Les projections sont choisies de telle manière que :

- les segments rouges soient parallèles et de même longueur
- les dessins des carrés de la face avant soient de même taille dans chacune des deux projections.

Étapes suivantes

Viennent ensuite s'aligner derrière ce premier cube neuf autres cubes de l'espace de même dimension.

Les alignements des arêtes de bout supérieures gauches sont épaissis en bleu. On peut vérifier que les deux segments dessinés en bleu sont parallèles sur le dessin, malgré les apparences.

RM_03

Le champ en projection parallèle

Trois commandes

Description de la fenêtre

La fenêtre comporte : à droite le dessin principal, à gauche un dessin en vraie grandeur et un tableau de commandes.

- **Le dessin principal** est un dessin en perspective parallèle. Ce dessin montre un tétraèdre et son image par une projection parallèle sur un écran rectangulaire, cadre du dessin. La surface prismatique, qui a pour base ce cadre, limite la partie de l'espace qui peut être projetée sur l'écran.
- **Le dessin en haut à gauche** représente en vraie grandeur le projeté du tétraèdre sur l'écran rectangulaire.
- **A l'ouverture**, les projetantes sont orthogonales au plan de l'écran.

Description des commandes

L'écran, base de la surface prismatique, est fixe.

- Les **génératrices** de cette surface sont des projetantes dont **la direction dépend des deux commandes suivantes** :
 - la **commande « orientation latérale des projetantes »** fait varier la direction des plans verticaux contenant la direction des projetantes. A l'ouverture, ces plans sont de bout.
 - la **commande « inclinaison des projetantes »** fait varier la direction des plans contenant la direction des projetantes et coupant le plan de l'écran selon une horizontale. A l'ouverture, ces plans sont horizontaux.
- La **commande « déplacement en hauteur du tétraèdre »** est indépendante de la direction de projection ; elle permet de déplacer le tétraèdre verticalement, de le faire sortir de la zone limitée par la surface prismatique, et d'y revenir. Le tracé de la partie du tétraèdre située hors de la zone prismatique devient gris clair.

RM_04

Le champ en projection centrale

Trois commandes

Description de la fenêtre

La fenêtre comporte : à droite le dessin principal, à gauche un dessin en vraie grandeur et un tableau de commandes.

- **Le dessin principal** est un dessin en perspective parallèle. Ce dessin montre un tétraèdre et son image par une projection centrale sur un écran rectangulaire, cadre du dessin. La surface pyramidale, qui a pour sommet le centre de projection et pour base ce cadre, limite la partie de l'espace qui peut être projetée sur l'écran.
- **Le dessin en haut à gauche** représente en vraie grandeur le projeté du tétraèdre sur l'écran rectangulaire.
- **A l'ouverture**, le centre de projection appartient au plan de l'une des faces du tétraèdre.

Description des commandes

L'écran, base de la surface pyramidale, est fixe.

- La position du sommet, centre de projection, dépend des deux commandes suivantes :
 - la **commande « déplacement latéral du point de vue »** permet de déplacer le centre de projection sur une horizontale parallèle au plan de projection
 - la **commande « déplacement en hauteur du point de vue »** permet de déplacer le centre de projection sur une verticale.

Quelle que soit la position de ces commandes, le centre de projection reste à la même distance du plan de projection.

- **La commande « déplacement en hauteur du tétraèdre »** permet de déplacer le tétraèdre verticalement, de le faire sortir de la zone limitée par la surface pyramidale, et d'y revenir. Le tracé de la partie située hors de la zone pyramidale devient gris clair.

RM_05

Projection parallèle : image d'une droite pivotant autour d'un point

Deux présentations

05a Première présentation

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

- **A droite, le dessin principal** (donné en perspective parallèle) comporte :
 - une surface prismatique limitant la partie de l'espace projetée sur l'écran rectangulaire rouge vertical, cadre du dessin, par la **projection parallèle** dont la direction est indiquée
 - une droite dont une partie est représentée en vert
 - l'image de cette droite - le segment rouge - par la projection parallèle sur l'écran.
- La droite passe par un point A fixe : le pivot.

- **A gauche, le dessin** représente en vraie grandeur l'écran rectangulaire rouge sur lequel est projetée la partie de la droite considérée.

Déroulement de l'animation

L'animation commence par la construction sur l'écran rouge du point B, image du point pivot A.

La droite tourne autour du point pivot A en engendrant ici une surface conique non plane :

- dans sa position initiale, la droite perce le plan de projection à l'intérieur du cadre du dessin
- dans sa position finale, la droite est horizontale et parallèle au plan de projection.

Sur l'écran rouge, l'image de la droite tourne autour de B, image du point pivot.

05b Deuxième présentation

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

- **A droite, le dessin principal** (donné en perspective parallèle) comporte une surface prismatique limitant la partie de l'espace projetée sur l'écran rectangulaire rouge vertical, cadre du dessin. La direction des projetantes de la **projection parallèle**, utilisée au cours du déroulement de l'animation, est indiquée.
- **A gauche, le dessin** représente en vraie grandeur l'écran rectangulaire rouge.

Déroulement de l'animation

- Une droite - en vert - et son image sur l'écran - en rouge - se tracent simultanément.
- Un point A de la droite et son image B sur l'écran apparaissent au cours du tracé.
- Dès que la droite et son image sont tracées, la droite tourne autour du **point-pivot fixe** A en engendrant ici une surface conique non plane.
- L'animation marque une pause quand la droite a pour direction celle des projetantes : l'image de la droite est le point B.
- En position finale, la droite est parallèle au plan de projection : la droite et son image sont parallèles.

Sur l'écran rouge, l'image de la droite tourne autour de B, image du point pivot.

RM_06

Projection centrale : image d'une droite pivotant autour d'un point

Deux présentations

06a Première présentation

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

- **A droite le dessin principal** (donné en perspective parallèle) comporte :
 - une surface pyramidale limitant le champ, partie de l'espace projetée sur l'écran rectangulaire rouge, cadre du dessin, par la **projection centrale** dont le centre est l'œil de l'observateur
 - une droite dont la partie située dans le champ est représentée en vert
 - l'image de cette droite - segment rouge - par la projection centrale sur l'écran.

La droite passe par un point fixe A, pivot dont la position est précisée par le segment vertical bleu ; son point de fuite F dans la projection centrale est alors situé sur l'écran rouge.

Rappel : pour une projection centrale donnée, le point de fuite d'une droite est le point d'intersection avec le plan de projection de la parallèle à cette droite passant par le centre de projection. (Pour le point de fuite en perspective centrale : voir, dans l'ouvrage le paragraphe 7 de ce chapitre et voir en RM_08 l'animation correspondante.)

- **A gauche, le dessin** donne en vraie grandeur l'écran rectangulaire rouge sur lequel sont représentés l'image du segment vert et le point de fuite.

Déroulement de l'animation

L'animation commence par la construction sur l'écran rouge du point B image du point-pivot A.

La droite tourne autour du point-pivot A en engendrant ici une surface conique non plane :

- dans sa position initiale, la droite perce le plan de projection à l'intérieur du cadre du dessin
- dans sa position finale, la droite est horizontale et parallèle au plan de projection.

A l'ouverture, le point de fuite F se trouve dans le cadre du dessin ; en cours d'animation, il sort de ce cadre.

La partie de la droite qui se trouve dans le champ est représentée par une demi-droite tant que le point de fuite se trouve dans le cadre du dessin. En position finale, le point de fuite n'existe plus : la droite et son image sont des droites de front parallèles.

Sur l'écran rouge, l'image de la droite tourne autour de B, image du point-pivot.

06b Deuxième présentation

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

- **A droite, le dessin principal** (donné en perspective parallèle) comporte une surface pyramidale limitant le champ, partie de l'espace projetée sur l'écran rectangulaire rouge, cadre du dessin, par la **projection centrale** dont le centre est l'œil de l'observateur.
- **A gauche, le dessin** représente en vraie grandeur le cadre du dessin.

Déroulement de l'animation

Une droite - en vert - et son image sur le cadre du dessin - en rouge - se tracent simultanément.

Un point A de la droite et son image B sur le cadre du dessin apparaissent au cours du tracé. Le point A désigne le pivot utilisé au cours de l'animation.

Dès que la droite et son image sont tracées, la droite tourne autour du **point-pivot fixe** A en engendrant ici une surface conique non plane. Au cours de l'animation, le point de fuite F de la direction de la droite apparaît sur le cadre du dessin puis disparaît de ce cadre. (Voir dans l'ouvrage le paragraphe 7 de ce chapitre pour la notion de point de fuite en perspective centrale et voir en RM_08 l'animation correspondante.)

La droite tourne autour du point-pivot en engendrant ici une surface conique non plane.

L'animation marque une pause quand la droite passe par le centre de projection : l'image de la droite est réduite à son point de fuite qui est alors le point B.

En position finale, la droite est parallèle au plan de projection : la droite et son image sont parallèles ; il n'y a pas de point de fuite.

Sur le dessin en vraie grandeur, l'image de la droite tourne autour de B, image du point-pivot.

RM_07

Perspective parallèle : dessin d'une droite

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

• **A droite, le dessin principal** (donné en perspective parallèle) comporte les caractéristiques de la projection parallèle :

- la direction des projetantes
- le plan de projection défini par le cadre du dessin.

• **A gauche**, le cadre du dessin est donné **en vraie grandeur**.

Déroulement de l'animation

L'animation commence par le tracé d'une droite verte qui perce le cadre du dessin au point S.

La projetante p du point S apparaît ; le point S est sa propre image dans la projection parallèle considérée. D'un côté du point S puis de l'autre, une projetante se déplace en s'appuyant sur la droite verte de façon à engendrer le plan projetant de la droite verte; ce plan coupe le cadre du dessin selon le segment rouge, dessin de la droite rouge sur le cadre du dessin.

RM_08

Perspective centrale : dessin d'une droite et de son point de fuite

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

• **A droite, le dessin principal** (donné en perspective parallèle) comporte les caractéristiques de la projection centrale :

- le centre, œil de l'observateur
- le plan de projection défini par le cadre du dessin.

• **A gauche, le cadre du dessin est donné en vraie grandeur.**

Déroulement de l'animation

L'animation commence par le tracé d'une droite verte qui perce le cadre du dessin au point S. La projetante du point S apparaît ; le point S est sa propre image dans la projection centrale considérée. Successivement de part et d'autre du point S, une projetante (demi-droite passant par le centre de projection) se déplace en s'appuyant sur la droite verte de façon à engendrer le plan projetant de la droite verte ; ce plan coupe le cadre du dessin selon le segment rouge.

Le tracé s'arrête lorsque la projetante est parallèle à la droite verte : le point d'intersection de la projetante avec le plan de projection est appelé **point de fuite**.

On peut dire que le point de fuite est l'image du point à l'infini de la droite verte.

(Voir dans l'ouvrage le paragraphe 7 de ce chapitre pour les notions particulières à la perspective centrale et voir aussi RM_17.)

RM_09

Perspective parallèle : dessin de deux droites parallèles

Une commande (à la souris)

Description de la fenêtre

- **A droite, le dessin principal** (donné en perspective parallèle) comporte :
 - le plan de projection défini par le cadre du dessin
 - deux droites vertes parallèles perçant le plan de projection aux points A et B
 - les segments rouges, projetés des droites vertes sur le cadre du dessin.
- **A gauche**, le cadre du dessin est donné **en vraie grandeur**.

Commande

La droite passant par le point A est fixe. On fait varier l'autre droite en déplaçant le point B (avec la souris) à l'intérieur du cadre du dessin ; notons que si ce point B sort du cadre la droite disparaît.

Cette animation montre que les plans projetants des deux droites parallèles sont parallèles entre eux, éventuellement confondus.

RM_10

Perspective centrale : dessin de deux droites parallèles

Une commande (à la souris)

Description de la fenêtre

- **A droite, le dessin principal** (donné en perspective parallèle) comporte
 - le centre de la projection centrale (œil de l'observateur)
 - le plan de projection défini par le cadre du dessin
 - deux droites vertes parallèles perçant le plan de projection aux points A et B
 - les segments rouges, projetés des droites vertes sur le cadre du dessin
 - le point de fuite de la direction d des deux droites.
- **A gauche**, le cadre du dessin est donné **en vraie grandeur**.

Commande

La droite passant par le point A est fixe. On fait varier l'autre droite en déplaçant le point B (avec la souris) à l'intérieur du cadre du dessin ; notons que si ce point B sort du cadre la droite disparaît.

Cette animation montre que les plans projetants des deux droites parallèles sont sécants selon une droite parallèle aux droites vertes coupant le plan du dessin au point de fuite de la direction d .

RM_11

Image d'un objet plan parallèle au plan de projection

Projection parallèle - Projection centrale

11a Projection parallèle

Trois commandes

Description de la fenêtre

Le dessin en perspective parallèle montre un objet plan (orange), la direction de projection (projetantes bleues) et le projeté (gris) de l'objet sur le plan de projection (cadre brun).

On peut considérer le projeté de l'objet comme l'*ombre au soleil* de cet objet.

Description des commandes

Le plan de projection et la direction de projection sont fixes.

Trois commandes permettent de déplacer l'objet par rapport aux données fixes :

- la **commande « déplacement latéral »**
- la **commande « déplacement en hauteur »**
- la **commande « déplacement en profondeur »** qui fait varier la distance de l'objet au plan de projection (objet restant en avant de ce plan).

L'image de l'objet a la même forme, la même taille et la même orientation que l'objet.

11b Projection centrale

Trois commandes

Description de la fenêtre

La projection centrale est définie par le plan de projection (cadre brun) et le centre de projection qui sont fixes.

Le dessin en perspective parallèle montre un objet plan (orange), le centre de projection (en avant du plan de projection) et le projeté (gris) de l'objet sur le plan de projection.

On peut considérer le projeté de l'objet comme l'*ombre au flambeau* de cet objet.

Description des commandes

Trois commandes permettent de déplacer l'objet par rapport aux données fixes :

- la **commande « déplacement latéral »**
- la **commande « déplacement en hauteur »**
- la **commande « déplacement en profondeur »**

A l'ouverture, l'objet est entre le centre et le plan de projection ; cet objet peut prendre d'autres positions, en passant en avant du centre de projection ou en arrière du plan de projection.

Trois plages sont définies sur la barre de commande.

1 - A l'ouverture le bouton de commande est situé dans la **zone centrale**, ce qui correspond à un placement de l'objet entre le centre de projection et le plan de projection.

2 - En plaçant le bouton de commande dans la **zone « en arrière »**, l'objet est placé **en arrière du plan de projection**.

3 - En plaçant le bouton de commande dans la **zone « en avant »**, l'objet est placé **en avant du centre de projection**.

L'image a la même forme que l'objet ; la taille et l'orientation de l'image varient avec la position de l'objet.

RM_12

Construction du dessin d'un cube en perspective parallèle

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

L'espace libre est destiné à recevoir :

- le dessin du cube
- le dessin en vraie grandeur de la face inférieure horizontale.

A droite, un cadre indique les différentes étapes de la construction.

Déroulement de l'animation

- On suppose que le plan du dessin est parallèle aux faces avant et arrière du cube. Le dessin de ce cube en perspective parallèle se construit en noir **à gauche** à partir d'un point, sommet de la face inférieure du cube et des trois arêtes (horizontale de front, verticale et de bout) qui apparaissent successivement.
- Le dessin bleu, **au centre**, est le dessin en vraie grandeur de la face inférieure du cube.

Au moment du tracé des éléments de la face inférieure, les **deux dessins** sont coordonnés.

En fin de construction, les deux faces de bout apparaissent avec le tracé des deux arêtes supérieures de bout.

Le dessin du cube est entièrement déterminé après le dessin de la première arête de bout.

RM_13

Construction du dessin d'un cube en perspective centrale

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

L'espace libre est destiné à recevoir :

- le dessin du cube sur un plan de front
- le dessin en vraie grandeur de la face inférieure horizontale.

A droite, un cadre indique les différentes étapes de la construction.

Déroulement de l'animation

On suppose que le plan du dessin est parallèle aux faces avant et arrière du cube.

1) Mise en place des éléments du dessin du cube

A partir d'un point, sommet de la face inférieure du cube, on place les trois arêtes, horizontale de front, verticale et de bout qui apparaissent successivement ; on construit alors la face arrière (frontale).

Le dessin noir et le dessin bleu sont coordonnés.

2) Dessin de la face inférieure

- Le dessin bleu est le dessin en vraie grandeur de la face inférieure du cube.
- Construction

Propriété de la perspective centrale

- Deux droites parallèles de même direction d et non parallèles au plan de projection sont représentées par deux demi-droites sécantes passant par le point de fuite de d .

- Deux droites parallèles entre elles et parallèles au plan de projection sont représentées par deux droites parallèles.

On choisit le point de fuite de la direction de l'arête de bout (sur le support de l'arête de bout). On en déduit le tracé du trapèze représentant la face inférieure du cube.

3) Représentation du cube

On complète successivement le tracé des arêtes frontales et des arêtes de bout.

On vérifie que le point de fuite appartient aux droites supports des arêtes de bout.

Le choix du dessin de l'arête de bout ne suffit pas à déterminer le dessin du cube ; il faut en outre choisir le point de fuite sur le support du dessin de cette arête. On peut voir l'influence de ce choix dans l'animation « RM_14 ».

RM_14

Influence du point de fuite sur le dessin d'un cube déterminé par trois arêtes (perspective centrale)

Une commande

Description de la fenêtre

- Le cube est représenté dans une perspective centrale où le plan du dessin est parallèle aux faces avant et arrière du cube. Les supports des représentations des quatre arêtes de bout concourent au point de fuite de leur direction.
- Le dessin des trois arêtes cachées (en vert), deux frontales et une de bout, est donné.
- La perspective centrale est déterminée par la donnée du point de fuite sur la droite support du dessin de l'arête de bout.

Description de la commande

La commande permet de déplacer le point de fuite sur la droite support du dessin de cette arête.

RM_15

Cube en perspective parallèle et en perspective centrale

Constructions synchronisées à partir du dessin de trois arêtes

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture et animation

La fenêtre est préparée pour les constructions des deux dessins d'un cube en perspective parallèle (RM_12) et en perspective centrale (RM_13), avec **les mêmes données initiales : trois arêtes** issues d'un même sommet, deux arêtes frontales et une arête de bout.

L'animation permet de suivre les constructions synchronisées de RM_12 et RM_13.

RM_16

Rapport de longueurs sur une fuyante

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

Un segment est dessiné en vraie grandeur sur chacun des trois dessins à venir :

- dessin dans un plan horizontal (en vraie grandeur)
- dessin en perspective parallèle
- dessin en perspective centrale.

La construction coordonnée des trois dessins annoncés permettra d'identifier la construction en perspective centrale.

Déroulement de l'animation

L'animation montre successivement :

- la construction du carré dont le segment donné est un côté
- les différentes étapes de la construction du point matérialisant le rapport x sur la fuyante correspondant au côté gauche du carré :
 - marquage d'un point sur la droite support du segment initial, matérialisant le rapport x
 - construction du point de fuite principal et de la ligne d'horizon sur le dessin en perspective centrale
 - construction d'une diagonale sur les trois dessins et du point de fuite de cette diagonale sur le dessin en perspective centrale
 - construction de la parallèle à la diagonale passant par le point matérialisant le rapport x .

Le point d'intersection de la parallèle à la diagonale avec le côté gauche du carré est le point matérialisant le rapport x sur la fuyante.

RM_17

Perspective centrale : points de distance

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

A droite, le dessin en perspective parallèle montre un plan de front (cadre du dessin) et un plan horizontal sur lequel se tient l'observateur.

La perspective centrale est déterminée par le centre de projection (œil de l'observateur) et par le plan de front (cadre du dessin).

Déroulement de l'animation

Première étape :

- à droite, est représenté le plan horizontal H passant par l'œil de l'observateur, plan qui détermine la ligne d'horizon sur le cadre du dessin

- à gauche, est représenté en vraie grandeur le plan horizontal H.

Dans les étapes suivantes, les tracés des dessins de gauche et de droite sont synchronisés.

Deuxième étape :

- la droite de bout passant par le centre de projection détermine le point de fuite des droites de bout (point de fuite principal)

- les droites horizontales passant par le centre et faisant un angle de 45° avec la droite de bout déterminent les deux points de distance.

Troisième étape :

- les constructions disparaissent, alors que restent la ligne d'horizon, le point de fuite principal et les deux points de distance.

RM_18

Perspective centrale : construction d'un carrelage (1)

À partir du point de fuite principal et d'un point de distance

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

- En haut, sur la ligne d'horizon (non tracée) sont indiqués le point de fuite principal et les deux points de distance.

- En bas, est tracé le bord du carrelage à construire.

Le carrelage est formé de carrés dont les côtés déterminent deux directions. L'une des directions (la première) est celle du bord du carrelage, et le point de fuite de l'autre direction (la deuxième) est le point de fuite principal.

Déroulement de l'animation

- A partir du point de fuite principal, se tracent les supports des côtés correspondant à la deuxième direction liée au point de fuite : ces supports divisent le bord du carrelage en segments de même longueur.

- A partir de l'un des points de distance, se tracent les supports des diagonales des carrés.

- A partir des points d'intersection ainsi obtenus, se tracent les côtés parallèles au bord du carrelage pour compléter le dessin.

- On vérifie alors que les supports des autres diagonales passent par l'autre point de distance.

RM_19

Perspective centrale : construction d'un carrelage (2)

À partir de deux points de distance

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

- En haut, sur la ligne d'horizon (non tracée) sont indiqués le point de fuite principal et les deux points de distance.

- En bas, est tracé le bord du carrelage dont le dessin est à construire.

Le carrelage est formé de carrés dont les côtés déterminent deux directions.

Sur le dessin :

- *La direction d'une diagonale de chacun des carrés est donnée par le bord du carrelage.*

- *Chaque point de distance est alors le point de fuite de l'une des deux directions des côtés des carrés.*

Déroulement de l'animation

- A partir du point de distance à gauche, se tracent les supports des côtés correspondant à l'une des directions des côtés : ces supports divisent le bord du carrelage en segments de même longueur. Ensuite les supports des côtés correspondant à la deuxième direction des côtés se tracent à partir du point de distance à droite.

- Le carrelage est mis en évidence ainsi que les diagonales parallèles au bord du carrelage.

- A la fin de l'animation, une droite pivotant autour du point de fuite principal permet de vérifier que le support de l'autre diagonale de chacun des carrés passe par ce point de fuite.

Conseil : En cliquant à l'intérieur de la fenêtre, on arrête l'animation ; il est alors possible de déplacer lentement le point d'animation en le tirant avec la souris.

RM_20

Construction sur un dessin en perspective centrale

Doubler une longueur - Influence des choix

20a Doubler une longueur

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

La fenêtre présente deux dessins :

- à gauche, un cadre rouge à l'intérieur duquel se fait la construction en perspective centrale
- à droite, l'espace disponible destiné à recevoir un dessin plan justifiant la construction.

Un point A de l'espace est représenté dans les dessins, à gauche et à droite.

Déroulement de l'animation

Première étape

- Une demi-droite d'origine A se dessine simultanément à gauche et à droite ; à gauche le tracé s'arrête au point de fuite I.
- Un point B est marqué sur cette demi-droite dans les deux dessins.

Deuxième étape : construction du point M de la demi-droite [AB) tel que $AM = 2 AB$.

• Construction auxiliaire

- Une droite arbitraire d passant par A est tracée dans les deux dessins.

A droite : le dessin est fait dans le plan P défini par la droite d et la demi-droite [AB).

A gauche : on suppose que la droite d représente une droite de l'espace parallèle au plan du dessin en perspective centrale.

- La droite d', parallèle à d et passant par I est ensuite tracée. Les points de fuite de toutes les droites contenues dans P sont situés sur cette droite d'.

- Sur chaque dessin, un point C est marqué sur la droite d et le point N est construit tel que $AN = 2 AC$. Ces deux constructions correspondent à la même relation dans l'espace : en effet, à droite le dessin est en vraie grandeur dans le plan P et, à gauche la droite d représente une droite de l'espace parallèle au plan de projection.

• Construction du point M comme application du théorème de Thalès

A droite : la droite parallèle à (CB) passant par N coupe la droite (AB) en M.

A gauche, on construit le point de fuite J de la droite (BC), intersection de (BC) et de d'. La droite (NJ) coupe la droite (AB) en M.

20b Influence des choix

Trois commandes

Seul le dessin en perspective centrale apparaît : ce dessin montre que dans la construction 20a, le point M ne dépend que des points A, I et B.

Les points A et I sont fixés.

Trois commandes permettent de faire varier le point B, le point C et la droite d.

• Commande « déplacement du point B »

La commande permet de déplacer le point B sur la droite (AI) et d'obtenir ainsi les positions du point M correspondant à différentes longueurs données.

• Commande « déplacement du point C »

La commande permet de déplacer C sur la droite d' ; la position du point M ne dépend pas du choix du point C.

• Commande « changement de droite d »

La commande permet de faire pivoter la droite d autour de A, tout en la considérant toujours parallèle au plan du dessin : la position du point M ne dépend pas du choix de la droite d.

Remarque

En remplaçant 2 par un autre nombre k de façon à placer N tel que $AN = k.AC$, la construction donne le point M de l'espace tel que $AM = k.AB$.

RM_21

De la vue de face à la vue de côté de deux sphères

Une commande

Description de la fenêtre à l'ouverture

A gauche

- La **vue de dessus** est obtenue par une projection orthogonale sur un plan horizontal : elle montre deux sphères extérieures l'une à l'autre.
- Le **rabattement R** du plan vertical V, frontal à l'ouverture, montre en vraie grandeur la **vue de face** des deux sphères*. On observe ainsi que les centres des deux sphères sont dans le même plan horizontal. Le **plan vertical V** de projection est représenté dans la vue de dessus par un segment rouge. La vue de dessus de l'image des deux sphères est donc contenue dans ce segment.

A droite

- Dans le cadre du haut « Image projetée sur le plan vertical V », la vue de face des deux sphères est reproduite.
- A côté de la légende, un quart de boussole indique la direction horizontale de la projection orthogonale sur le plan vertical V, frontal à l'ouverture.
- Le bouton de la commande est en position « vue de face ».

Description de la commande

La commande, utilisée de droite à gauche, fait varier le plan vertical V d'une position frontale (**vue de face**) à une position de bout (**vue de côté**).

La **boussole** indique la direction de projection.

Au cours du déplacement, le rabattement R montre les modifications de l'image des deux sphères sur le plan V ; l'image est reproduite dans le cadre du haut à droite.

* Une vue de face est obtenue par projection orthogonale sur un plan frontal.

RM_22

Les trois vues d'un objet "pointe"

Animation en boucle

Nous appelons **objet « pointe »** un objet qui a la forme de la pointe de certains gros feutres destinés à produire des traits épais.

On obtient un tel objet à partir d'un cylindre de révolution que l'on coupe par trois plans (Voir RM_25) :

- deux plans en biais symétriques par rapport à l'axe du cylindre
- un plan de section droite.

Description de la fenêtre à l'ouverture

A l'ouverture, la fenêtre montre un dessin en perspective parallèle.

Ce dessin représente un objet « pointe » en noir et ses trois images dans les projections orthogonales suivantes :

- sur le plan frontal, plan du dessin, un rectangle rouge (en vraie grandeur) partiellement masqué par l'objet
- sur le plan horizontal, un cercle bleu et son diamètre frontal
- sur un plan de bout, un triangle isocèle bleu.

Déroulement de l'animation

L'animation met en évidence successivement les trois images en vraie grandeur :

- Le plan horizontal est rabattu sur le plan du dessin et donne la vue de dessus de l'objet, en dessous de la vue de face.
- Le plan de bout est rabattu sur le plan du dessin et donne la vue de côté, à gauche de la vue de face.
- L'objet disparaît et la vue de face apparaît en entier.
- La vue de côté vient se placer à droite de la vue de face, conformément à la disposition présentée dans l'ouvrage.

RM_23

Une "pointe" animée

Deux dessins

23a Une "pointe" transparente en projection parallèle

- *Animation en boucle commandée*
- *Animation en boucle automatique*

23b : Une pointe opaque en projection orthogonale

23a Une "pointe" transparente en projection parallèle

Animation en boucle

Description de la fenêtre

La fenêtre comporte à gauche le dessin de la pointe et à droite un cadre contenant une commande d'animation.

Le dessin montre une « pointe » (voir RM_22) dans une projection orthogonale.

L'objet est transparent et laisse voir les bords des surfaces délimitant cet objet.

Les bords de ces surfaces sont obtenus par les trois sections du cylindre :

- le cercle de base représenté par une ellipse
- les deux demi-ellipses latérales représentées par des demi-ellipses.

Sont également représentées deux coupes de la « pointe » par deux plans perpendiculaires à la base et perpendiculaires entre eux :

- le rectangle bleu contenant le petit axe commun aux deux demi-ellipses latérales
- le triangle isocèle rouge contenant les deux demi grands axes des deux demi-ellipses latérales.

Le rectangle bleu et le triangle rouge sont contours apparents de l'objet pour deux positions particulières.

Déroulement de l'animation

- *Animation en boucle commandée*

En déplaçant le point sur le cercle dans un sens ou dans l'autre, l'objet tourne autour de l'axe du cylindre.

- *Animation en boucle automatique*

L'animation en boucle précédente est obtenue automatiquement dès l'ouverture.

A tout moment, l'animation automatique peut être suspendue au profit d'une animation manuelle.

23b : Une "pointe" opaque en projection orthogonale

Il y a trois différences avec l'animation RM_23 a :

- la projection est orthogonale
- le dessin représente une "pointe" opaque
- il y a, outre la commande d'animation, une commande de basculement qui agit sur l'inclinaison de l'axe et permet de passer de vues horizontales (en particulier vue de côté et vue de face) à des vues verticales (vues de dessus).

RM_24

Les trois vues d'une "pointe" opaque

Animation en boucle

La fabrication de la « pointe » opaque est explicitée en RM_25 et la présentation des trois vues est donnée en RM_22.

D'une vue à l'autre : déroulement de l'animation

- A l'ouverture, le plan de projection est le plan horizontal contenant la **vue de dessus (1)**. Le plan de projection pivote à partir de la position de plan horizontal pour prendre la position de plan frontal contenant la **vue de face (2)**.
- Ensuite, le plan de projection pivote à partir de la position de plan frontal contenant la **vue de face (2)** pour prendre la position de plan de bout contenant la **vue de côté (3)**.
- Enfin le plan de projection pivote à partir de la position de plan de bout contenant la **vue de côté (3)** pour prendre la position de plan horizontal, puis une rotation de 90° de ce plan permet de retrouver la **vue de dessus (1)**.

Une autre manière de voir

On peut aussi considérer que l'objet pivote pour présenter successivement à la projection orthogonale son dessus, sa face et son côté. (Voir IM_15.)

RM_25

Découpe de l'objet "pointe" dans un cylindre

Comment obtenir une pointe en trois coups de scie

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

La fenêtre comporte :

- à gauche, la représentation d'un cylindre en projection orthogonale
- à droite, un cadre contenant les différentes étapes de la découpe.

On peut supposer qu'il s'agit d'une vue de face d'un cylindre droit à base circulaire dont les génératrices sont des droites non verticales et situées dans des plans de bout.

Déroulement de l'animation

- On découpe par un plan en biais le cylindre dont la partie inférieure est conservée : on obtient une section en biseau dont le contour est une ellipse.
- On découpe l'objet obtenu par un deuxième plan symétrique du premier par rapport à l'axe du cylindre, on conserve de nouveau la partie inférieure et on obtient ainsi une pointe en deux biseaux.
- On découpe cette pointe par un troisième plan de section droite et on supprime la dernière partie cylindrique pour obtenir l'objet « pointe ».

L'objet « pointe » se projette

- en vue de dessus, selon un cercle
- en vue de face, selon un rectangle
- en vue de côté, selon un triangle isocèle.

RM_26

Géométrie descriptive

Animation en boucle

Une commande

L'objet choisi pour être représenté ici en géométrie descriptive est formé de deux biseaux, faces planes d'un objet "pointe" (voir RM_22 et RM_25.) dont le segment d'intersection est horizontal.

L'épure nécessite le choix d'un plan horizontal et d'un plan frontal qui est ici parallèle au plan de symétrie des deux biseaux.

L'épure est constituée des éléments suivants :

- la **ligne de terre**, droite d'intersection du plan frontal et du plan horizontal ;
- **deux représentations coordonnées** des figures projetées de l'objet sur le plan frontal et sur le plan horizontal, le plan horizontal étant rabattu sur le plan frontal autour de la ligne de terre.

Description de la fenêtre

A droite, la vue en perspective parallèle constitue une aide à la lecture de l'épure ; elle montre les deux biseaux sécants ainsi que leurs projetés sur le plan frontal et sur le plan horizontal.

Les projetés sur le plan frontal sont confondus et limités par une demi-ellipse et son petit axe.

Les projetés sur le plan horizontal sont limités par deux demi-cercles de même diamètre.

Chaque point de l'objet est le sommet d'un rectangle, situé dans un plan de bout ; deux autres sommets du rectangle sont le projeté frontal et le projeté horizontal de ce point, le quatrième sommet étant sur la ligne de terre.

Selon la position du point sur le contour de l'objet, le rectangle est rouge ou bleu :

- rouge lorsque le point est situé sur l'une des demi-ellipses du contour de l'objet
- bleu lorsque le point est sur le segment d'intersection des deux biseaux.

A gauche, l'épure tracée dans le plan frontal est constituée de la ligne de terre, du dessin de la figure projetée sur le plan frontal et du dessin de la figure projetée sur le plan horizontal :

- le dessin sur le plan frontal est une demi-ellipse limitée par son petit axe
- le dessin sur le plan horizontal, rabattu sur le plan frontal, est un cercle muni d'un diamètre.

Les quatre côtés du rectangle associé à un point du contour de l'objet (Voir la vue en perspective parallèle.) sont portés par une seule droite perpendiculaire à la ligne de terre, **ligne de rappel** du point concerné. Cette ligne de rappel a la couleur du rectangle correspondant.

Animation

Cette animation montre comment à chaque point de l'espace sont associés deux points de l'épure sur une même ligne de rappel, et réciproquement.

Le déplacement d'un point du contour de l'objet (vue en perspective parallèle) et celui des deux points correspondants de la ligne de rappel rouge sur l'épure sont coordonnés. Le bouton rouge permet l'animation en boucle de ces déplacements.

Le point de l'objet se déplace successivement sur l'une puis sur l'autre des demi-ellipses limitant les biseaux.

Description de la commande

Le bouton bleu permet de déplacer un point du segment d'intersection des deux biseaux et la ligne de rappel bleue correspondante, de manière coordonnée.

RM_27

Une "pointe" se déplace

27a : verticalement

27b : latéralement

27c : en profondeur

Les vues de face, de côté, de dessus de l'objet pointe sont données en RM_22.

Une construction de l'objet pointe est présentée en RM_25.

Animations Aller Retour

Chaque animation, obtenue automatiquement dès l'ouverture, se déroule lentement et vient enrichir la perception géométrique de l'objet.

RM_28

Rayons lumineux éclairant une sphère

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

Le dispositif est constitué par une source lumineuse éclairant une sphère dont l'ombre est projetée sur un plan frontal.

- **En haut, le dessin principal** est une **vue de face** (projection orthogonale sur un plan frontal) du dispositif. La partie non éclairée de la sphère est hachurée, ainsi que l'ombre portée.

- **En bas, un dessin auxiliaire à l'échelle $\frac{1}{2}$** est une **vue de dessus** (projection orthogonale sur un plan horizontal) du dispositif indiquant les positions relatives de la sphère, de la source lumineuse et du plan frontal contenant l'ombre portée.

- **Un cadre** indique les différentes étapes de l'animation.

Déroulement de l'animation

Successivement, trois rayons lumineux partent de la source lumineuse.

Le premier rayon (noir) frappe la sphère ; son prolongement passe par un point de l'intérieur de l'ombre portée.

Le second rayon (bleu) rase la sphère et atteint le plan de l'ombre portée au bord de cette ombre.

Le troisième rayon (rouge) passe à l'extérieur de la sphère et frappe le plan de l'ombre portée à l'extérieur de celle-ci.

RM_29

Le contour apparent d'une sphère en projection centrale

Animation AR

Description de la fenêtre à l'ouverture

La fenêtre s'ouvre sur le dessin final de l'animation RM_28 complété, en bas à droite, par un dessin en vraie grandeur de l'ombre portée ; les hachures de l'ombre portée ne sont pas reproduites.

La source lumineuse ponctuelle est considérée ici comme le centre d'une projection centrale sur un plan variable au cours de l'animation.

Déroulement de l'animation

A l'ouverture, le plan de l'ombre portée est frontal.

Au cours de l'animation, ce plan pivote autour d'une droite verticale jusqu'à devenir perpendiculaire au diamètre de la sphère passant par le centre de projection.

Dans cette position finale du plan de projection, la figure projetée de l'intérieur de la sphère est un disque vu en biais sur le dessin principal.

RM_30

Images d'une sphère variable par des projections centrales

Une commande

L'animation simule la prise simultanée de deux photographies d'une sphère de rayon constant dont le centre se déplace sur un segment parallèle à un plan horizontal.

Dans le modèle mathématique, une prise de vue correspond à une projection centrale et l'objectif est au centre de la projection.

- Le premier appareil est fixe et son axe est vertical ; le plan de projection correspondant est le plan horizontal.

- Le deuxième appareil est mobile et "suit" la sphère : son axe passe constamment par le centre de cette sphère. Le plan de projection correspondant à cet appareil reste perpendiculaire au diamètre de la sphère passant par le centre de projection ; la distance entre le centre de projection et le plan de projection est constante.

Description de la fenêtre à l'ouverture

Les deux projections - l'une fixe, l'autre variable - coïncident car le centre de la sphère est sur la verticale du centre de projection.

En bas à gauche, deux cadres simulent les deux photographies de la sphère, en rouge par l'appareil fixe, en bleu par l'appareil mobile ; ces deux photographies sont confondues.

Au milieu, une coupe dans le plan vertical contenant le centre de la sphère simule une prise de vue. Les plans des deux projections, fixe et variable, sont confondus.

En haut à droite, une vue réduite en perspective parallèle simule la même prise de vue.

Description de la commande

Le déplacement du point de commande **de gauche à droite** entraîne :

- le déplacement du plan de projection variable (en bleu), la distance entre le centre de projection et le plan de projection étant une **distance constante**

- le déplacement du centre de la sphère **de gauche à droite** sur un segment horizontal

- le déplacement **de bas en haut** de l'image de la sphère dans le cadre rouge à gauche (photographie fixe), image qui sort rapidement de ce cadre

- la **diminution du rayon** du cercle image de la sphère dans le cadre bleu à gauche (photographie mobile), cercle de centre fixe.

L'image de la sphère reste centrée dans la photographie mobile ; elle sort du cadre dans la photographie fixe.

RM_31

Le contour apparent d'une sphère en projection parallèle

Animation AR

Des rayons lumineux parallèles éclairent une sphère dont l'ombre est portée par un plan frontal ; ce dispositif donne le contour apparent d'une sphère en projection parallèle.

Description de la fenêtre à l'ouverture

- **En haut, le dessin principal** est une **vue de face** (projection orthogonale sur un plan frontal). La partie non éclairée de la sphère est hachurée.
- **En bas à gauche, un dessin auxiliaire à l'échelle $\frac{1}{2}$** est une **vue de dessus** (projection orthogonale sur un plan horizontal) indiquant les positions relatives de la sphère et du plan de projection (frontal à l'ouverture) contenant l'ombre portée.
- **En bas à droite**, le dessin montre en vraie grandeur l'image de la sphère dans le plan de projection.

Déroulement de l'animation

A l'ouverture, le plan de projection est frontal. Dans ce cas particulier, la vue de face présente le contenu du plan de projection en vraie grandeur ; les deux dessins de droite sont identiques.

Au cours de l'animation, le plan de projection pivote autour d'une droite verticale jusqu'à devenir perpendiculaire aux projetantes tandis que la figure projetée du contour apparent est une ellipse dont la forme change jusqu'à devenir un cercle. Cette figure projetée est vue en biais sur le dessin principal (vue de face) ; elle est en vraie grandeur sur le dessin du dessous.

RM_32

Les cubes sortent de l'ombre

32a *Première présentation*

Animation en boucle

Description de la fenêtre et déroulement de l'animation

Les douze ombres présentées sont des ombres de cubes en perspective parallèle ou en perspective centrale.

Au cours de l'animation, les douze ombres de cubes sont remplacées successivement par le dessin correspondant du cube, en rouge dans le cas d'une perspective centrale et en bleu dans le cas d'une perspective parallèle.

32b *Deuxième présentation*

Douze commandes

Description de la fenêtre et déroulement de l'animation

Les dessins sont les mêmes que ceux de RM_32a. Une commande affectée à chaque dessin permet de passer de l'ombre du cube au dessin en perspective parallèle ou en perspective centrale, et réciproquement.