

Chapitre 7 - IM

ICONOTYPES MATHÉMATIQUES EN GÉOMÉTRIE

Schémas - Dessins cohérents

IM_01	Dessin d'une cocotte en projection orthogonale
IM_02	Image d'un cercle par projection orthogonale
IM_03	Iconotypes d'un rectangle dans l'espace
IM_04	Iconotypes d'un cube
IM_05	Cylindre de révolution
IM_06	Cône de révolution
IM_07	Deux vues coordonnées d'un cône qui pivote
IM_08	Dessin d'une sphère « terrestre » en projection orthogonale
IM_09	Dessin 1 (Annales de Brevet 2004)
IM_10	Dessin 2 (Annales de Brevet 2004)
IM_11	Tentative d'amélioration du dessin 1 des Annales (IM_09)
IM_12	Comment rendre cohérent le dessin 1 des Annales (IM_09)
IM_13	Sphère « terrestre » avec un parallèle variable : iconotype incohérent
IM_14	Sphère « terrestre » avec un parallèle variable : dessin cohérent
IM_15	Deux interprétations d'un dessin de sphère « terrestre »
IM_16	Cercle inscrit dans un carré
IM_17	La figure du dessin 2 des Annales
IM_18	Comment rendre cohérent le dessin 2 des Annales (IM_10)
IM_19	Des cercles se projetant selon la même ellipse
IM_20	Dessins de pyramides
IM_21	Deux dessins d'un cylindre
IM_22	Points de fuite – Villa de Poppée à Oplontis
IM_23	Le cercle de contour apparent d'une sphère photographiée
IM_24	Construction de l'image d'un globe terrestre par projections
IM_25	Dessin d'une sphère « terrestre » en perspective centrale
IM_26	Dessin d'une sphère « terrestre » en projection orthogonale
IM_27	Intersection de deux sphères

IM_01

Dessin d'une cocotte en projection orthogonale

Introduction d'un quadrillage à mailles rectangulaires

Animation en boucle

Description de la fenêtre

La fenêtre comporte deux quadrillages :

- à gauche un quadrillage à mailles carrées,
- à droite un quadrillage à mailles rectangulaires.

La plus grande dimension de la maille rectangulaire est égale à la dimension de la maille carrée.

Le quadrillage à mailles rectangulaires est la reproduction de l'image sur un plan du quadrillage à mailles carrées par une projection orthogonale.

Les deux quadrillages se correspondent noeud à noeud.

Déroulement de l'animation

Deux polygones en forme de cocotte se dessinent simultanément sur les deux quadrillages : les deux tracés joignent successivement les nœuds homologues. Quand les lignes polygonales sont refermées, l'intérieur des deux polygones se remplit.

IM_02

Image d'un cercle par projection orthogonale

Évolution du processus de tracé par les élèves

Animation en boucle

Description de la fenêtre

La fenêtre comporte les mêmes quadrillages que dans le dessin précédent (IM_01).

Déroulement de l'animation

Sur le quadrillage de gauche se dessine un cercle qui passe par douze noeuds de ce quadrillage. La construction de l'image se fait sur le quadrillage à mailles rectangulaires, par étapes, en utilisant un nombre croissant de noeuds des quadrillages.

- Tracés successifs d'un arc de cercle et de son symétrique

Sur le quadrillage à mailles carrées sont mis en évidence trois noeuds, milieux de trois côtés du carré ; simultanément sont mis en évidence leurs trois points homologues sur le quadrillage à mailles rectangulaires. Ensuite se dessine sur le quadrillage à mailles rectangulaires l'arc de cercle déterminé par ces derniers points.

La mise en évidence d'un quatrième noeud et de son homologue conduit au tracé, sur le quadrillage à mailles rectangulaires, d'un deuxième arc de cercle symétrique du premier par rapport à la médiane horizontale du rectangle.

- Tracé d'une courbe pointue

Sur les deux quadrillages, sont mis en évidence simultanément les huit autres noeuds par lesquels passe le cercle et leurs homologues.

Sur le quadrillage à mailles rectangulaires, un nouveau dessin en fuseau remplace les arcs de cercles et passe par les douze noeuds.

- Tracé d'une courbe arrondie : une ellipse

Pour terminer, une courbe arrondie en forme d'ellipse donne l'image du cercle par projection orthogonale en utilisant un nouveau point du quadrillage qui n'est pas un noeud.

IM_03

Iconotypes d'un rectangle dans l'espace

Représentations d'un plan horizontal

Animation en boucle

Description de la fenêtre et déroulement de l'animation

A l'ouverture, la fenêtre contient un rectangle dans le plan du dessin ; l'animation en donne cinq représentations successives "en perspective".

- Les deux premières représentations, un rectangle et un parallélogramme, sont celles qui se trouvent majoritairement dans les ouvrages du XIX^e siècle.

Le rectangle, puis le parallélogramme se transforment ensuite en trapèzes pour accentuer l'impression de profondeur : convergence des fuyantes (exagérée dans cette animation par rapport aux dessins des manuels) et renforcement du bord pour donner une *épaisseur* aux plans.

- Les trois autres représentations sont majoritaires actuellement.

La première représentation correspond aux normes AFNOR : rapport de réduction 1/2 et angle de 45°.

La seconde représentation résulte d'une étude statistique de productions d'élèves de Collège et Lycée : rapport de réduction 1/2 et angle de 60°.

La troisième représentation (losange) est surtout produite par les élèves en début de Collège.

IM_04

Iconotypes d'un cube

Une commande

Description de la fenêtre

A l'ouverture, la fenêtre comporte quatre représentations d'un carré de l'espace :

- sur la première ligne, trois représentations de ce carré de l'espace sont les trois iconotypes qu'on trouve le plus souvent pour un carré horizontal. (voir IM_03)
- sur la deuxième ligne, une représentation en vraie grandeur de ce carré situé dans un plan frontal, parallèle au plan du dessin. C'est la face avant du cube.

Déroulement de l'animation

- Construction du premier iconotype :
le premier iconotype de carré glisse vers le carré en vraie grandeur puis, en respectant le parallélisme des fuyantes, la construction du premier iconotype de cube est complétée par le dessin de la face droite.
- Construction des deuxième et troisième iconotypes :
même procédure avec les deux autres iconotypes de carré.
- Construction du quatrième iconotype :
la dernière fuyante est dessinée dans le prolongement de l'arête inférieure de la face avant : elle est horizontale, non parallèle aux deux autres, si bien que la face inférieure du cube se réduit à un tracé rectiligne ; on trouve l'utilisation d'un tel tracé rectiligne dans l'iconotype 2 du cylindre (voir IM_05) ou dans certains dessins de pyramide.

Ce quatrième iconotype de cube est produit par les élèves au début du Collège.

IM_05

Cylindre de révolution

Représentations dans différentes perspectives et deux iconotypes

Animation en boucle

Description de la fenêtre

1. Première et deuxième étapes (cylindre fixe et cylindre pivotant)

- La partie gauche de la fenêtre est réservée à la représentation animée cohérente d'un cylindre sur un plan de front.

- La partie droite associée montre une vue de côté de ce cylindre.

A l'ouverture et pendant la première étape :

- **à gauche comme à droite**, les génératrices du cylindre (en bleu) sont perpendiculaires au plan de front - c'est-à-dire horizontales dans des plans de bout – et les bases (en rouge) sont dans des plans de front

- **à gauche**, le **dessin** montre, dans une perspective parallèle, ces bases "en vraie grandeur".

Pendant la deuxième étape, à gauche, le cylindre est représenté en projection orthogonale sur le plan de front.

Pendant les deux étapes, à droite, la vue de côté du cylindre est un rectangle. Les côtés (en bleu) représentent les génératrices inférieure et supérieure du cylindre et les côtés (en rouge) représentent les bases.

2. Troisième étape (deux iconotypes)

Dans la partie gauche, deux iconotypes, qui sont des dessins de communication incohérents, prennent successivement la place des représentations du cylindre. La partie droite est vide pour indiquer que les dessins ne sont plus obtenus par projection.

Déroulement de l'animation

- Première étape : cylindre fixe

Le **dessin de gauche** est une représentation du cylindre dans **une projection parallèle de direction variable** qui fait passer de la perspective cavalière initiale à la projection orthogonale sur le **plan de front**.

Le **dessin de droite** est **invariant**.

- Deuxième étape : cylindre pivotant

Le cylindre pivote autour d'un axe horizontal et parallèle au plan frontal.

Chaque génératrice pivote dans un plan de bout ; les plans des bases ne sont plus frontaux.

Le **dessin de gauche** est la représentation du cylindre pivotant, en **projection orthogonale** sur le **plan de front**.

Le **dessin de droite** - vue de côté - montre le pivotement du rectangle au cours de la rotation.

- Troisième étape : deux iconotypes

Les deux schémas successifs mettent en évidence les altérations souvent observées dans les dessins de communication.

IM_06

Cône de révolution

Deux iconotypes et un dessin cohérent

Animation en boucle

Description de la fenêtre

A l'ouverture, la liste des différentes étapes de l'animation est affichée.

Déroulement de l'animation

Cette animation montre trois manières de représenter un cône.

- **Premier iconotype**

Cet iconotype est obtenu par le tracé de deux génératrices, puis de la base formée de deux arcs de cercle.

- **Deuxième iconotype**

Cet iconotype est obtenu, à partir du précédent, en remplaçant la base en fuseau par une base en ellipse.

On peut constater alors que la base en ellipse déborde du contour apparent déterminé par les génératrices.

- **Dessin cohérent**

Pour terminer, la base et le sommet sont conservés, mais les génératrices sont modifiées pour obtenir les génératrices du contour apparent réel (voir aussi IM_12).

IM_07

Deux vues coordonnées d'un cône qui pivote

Une commande

Description de la fenêtre et de la commande

La **fenêtre** présente deux dessins d'un cône de révolution dont la base circulaire a un diamètre horizontal dans un plan frontal.

Ces deux dessins - une vue de face et une vue de côté – sont coordonnés ; la lumière éclaire l'avant du cône perpendiculairement au plan frontal.

La **commande** permet de faire pivoter le cône autour du diamètre frontal de sa base : en position initiale la base est horizontale, puis le sommet du cône bascule en arrière d'un quart de tour, et en position finale la base est frontale.

Vue de face (dessin de gauche)

En position initiale, la base est horizontale ; le cône est représenté par un triangle isocèle.

En position finale, la base est frontale, le sommet est vers l'arrière ; le cône est représenté par le cercle projeté du disque de base, seule partie éclairée du cône.

Vue de côté (dessin de droite)

Dans cette vue de côté, la lumière - qui éclaire l'avant du cône - vient de la gauche et le cône est représenté par un triangle isocèle ; la base du cône est représentée par la base du triangle isocèle.

En position initiale, la base du cône est horizontale, la partie gauche – éclairée - et la partie droite grisée - dans l'ombre - sont symétriques par rapport à l'axe vertical.

Au cours du pivotement, la partie grisée couvre peu à peu le triangle isocèle.

En position finale, la base est frontale et le sommet est en arrière de la base ; la surface latérale du cône est dans l'ombre, le triangle isocèle qui la représente est grisé.

IM_08

Dessin d'une sphère «terrestre» en projection orthogonale

Une commande

Conventions de dessin

La partie en arrière de l'équateur est dessinée en trait fin.

La partie de l'axe des pôles figurée sur le dessin est de longueur constante dans l'espace.

Description de la fenêtre et de la commande

La fenêtre présente les dessins, en **vue de face** et en **vue de côté réduite**, d'une sphère terrestre, de son axe des pôles et de son équateur.

La **commande** permet de faire pivoter la sphère autour du diamètre horizontal situé dans un plan frontal.

Vue de face

En position initiale, l'axe des pôles est vertical et l'équateur est représenté par un segment. Puis l'axe des pôles pivote, le pôle Nord bascule vers l'avant et l'équateur est représenté par une ellipse d'excentricité de plus en plus faible. En position finale, l'axe des pôles est une droite de bout et l'équateur est devenu le cercle de contour apparent de la sphère.

Le dessin du contour apparent de la sphère – un cercle – ne varie pas au cours de la rotation.

Vue de côté réduite

Dans toutes les positions, l'équateur est représenté par un segment. Cette vue montre l'inclinaison de l'axe des pôles par rapport à la verticale au cours du pivotement.

IM_09

Dessin 1 (Annales de Brevet 2004)

Animation en boucle

Description de la fenêtre et de l'animation

A l'ouverture, la fenêtre est vide.

L'animation donne le tracé par étapes du dessin d'une balise, formée d'une demi-sphère surmontée d'un cône :

- étape 1 : dessin d'une coupe de l'objet de l'espace par un plan de symétrie
- étape 2 : construction d'un fuseau (arcs de cercles) pour indiquer la profondeur.

On obtient le dessin représentant la balise dans les Annales consultées ; le dessin est incohérent.

IM_10

Dessin 2 (Annales de brevet 2004)

Une sphère, un triangle et deux cercles parallèles

Animation en boucle

Description de la fenêtre

A l'ouverture, la fenêtre contient le programme de la construction qui va être réalisée dans la partie gauche de la fenêtre.

Déroulement de l'animation

L'animation donne le tracé progressif du dessin respectant ce programme de construction. On obtient ainsi le dessin du sujet du brevet. Il serait possible d'introduire des variantes dans ce programme pour obtenir le même dessin.

Commentaire

Ce dessin n'est pas une représentation cohérente d'une figure de l'espace. On peut rendre cette représentation cohérente : se reporter à IM_18.

D'après le contexte de l'exercice, le plan du dessin est vertical ; on peut le supposer frontal.

IM_11

Tentative d'amélioration du dessin 1 des annales (IM_09)

Animation en boucle

Description de la fenêtre et de l'animation

Le plan du dessin est supposé frontal.

A l'ouverture, la fenêtre est vide.

L'animation donne le tracé par étapes du dessin de la balise (voir IM_09) :

- étape 1 : dessin d'une coupe de l'objet de l'espace par un plan de symétrie frontal
- étape 2 : construction d'une ellipse (au lieu d'un fuseau) pour indiquer la profondeur.

Le dessin reste incohérent : l'ellipse « déborde » le contour apparent.

Remarque

Le dessin de la feuille d'examen remise aux candidats est le dessin IM_09, mais dans certaines annales de l'année 2004, ce dessin a été remplacé par le présent dessin amélioré (IM_11), tout aussi incohérent.

IM_12

Comment rendre cohérent le dessin 1 des annales (IM_09)

Animation en boucle

Description de la fenêtre et de l'animation

- **A l'ouverture**, la fenêtre est préparée pour recevoir :

- **à gauche**, le tracé par étapes du dessin principal

- **à droite**, une vue de côté réduite, permettant d'interpréter certains éléments du dessin principal.

- **L'animation** comporte deux phases :

- la reprise du tracé par étapes du dessin de la balise (voir IM_11)
- la rectification du dessin de la balise.

Reprise du tracé de IM_11 complété par le tracé de la vue de côté associée

- Etape 1 : dessin d'une coupe de la balise par son plan de symétrie frontal

- Etape 2 : construction d'une ellipse pour indiquer la profondeur de l'objet de l'espace.

En représentant le cercle - bord circulaire de la demi-sphère - par une ellipse, on choisit ce cercle dans un plan qui n'est pas horizontal ; ce plan n'est pas perpendiculaire à l'axe de la balise, dessiné antérieurement.

Rectification

La rectification consiste à faire pivoter l'axe de la balise pour le rendre perpendiculaire au plan du bord circulaire de la demi-sphère. Sur le dessin principal, les génératrices dessinées se déplacent progressivement jusqu'à devenir tangentes à l'ellipse pour donner le contour apparent de la balise.

En fin d'animation, on obtient à gauche un dessin cohérent : dessin en projection orthogonale de la balise dont l'axe a basculé. La dernière vue de côté donne les positions de l'axe de la balise et de la demi-sphère.

Remarque

Notons que, dans le dessin principal, la surface du cône surmontant la demi-sphère laisse voir l'axe et l'arrière du bord circulaire. L'axe et le bord circulaire de la demi-sphère sont représentés en totalité sans tenir compte de l'état de leur visibilité.

IM_13

Sphère « terrestre » avec un parallèle variable *Iconotype incohérent*

Deux commandes

Description de la fenêtre

A l'ouverture, la fenêtre présente le dessin d'une sphère « terrestre » :

- le contour apparent : un cercle
- les deux pôles sur le contour apparent
- l'équateur et un parallèle.

Le dessin de cette sphère « terrestre » peut être considéré comme une vue de face en ce qui concerne le contour apparent et les deux pôles alors que les tracés de l'équateur et du parallèle sont donnés par une autre projection.

On peut observer que le parallèle est représenté par une ellipse qui déborde du contour apparent, le grand axe de l'ellipse étant une corde de ce contour apparent.

Ce dessin est incohérent comme le dessin IM_11.

Les commandes

- La commande « **inclinaison de l'équateur** » permet de faire pivoter l'équateur autour de son diamètre frontal horizontal, la ligne des pôles restant fixe.

Le dessin est incohérent pour toutes les positions de cette commande, à l'exception de la position située à l'extrémité gauche.

En effet, pour cette seule position à l'extrémité gauche de la commande, le plan de l'équateur est représenté perpendiculairement à l'axe des pôles.

- La commande « **déplacement du parallèle** » permet de choisir la latitude du parallèle.

IM_14

Sphère « terrestre » avec un parallèle variable

Dessin cohérent

Deux commandes

Description de la fenêtre et des commandes

• **A l'ouverture**, la fenêtre présente, en vue de face, le dessin d'une sphère « terrestre » comportant :

- l'équateur et les pôles

- le grand cercle passant par les deux pôles et contenant le diamètre frontal horizontal de la sphère

- un parallèle.

• La commande « **inclinaison de la ligne des pôles** » permet de faire pivoter la sphère - équateur et ligne des pôles, solidairement - autour de son diamètre frontal horizontal.

• La commande « **choix du parallèle** » permet de choisir la latitude d'un parallèle.

Ce dessin est cohérent et le dessin du parallèle est bien contenu dans le contour apparent de la sphère.

IM_15

Deux interprétations d'un dessin de sphère « terrestre »

Une commande

Description de la fenêtre et de la commande

La fenêtre présente trois dessins.

Le dessin de gauche est le dessin d'une sphère « terrestre » en projection orthogonale.

Les deux autres dessins sont des vues de côté de la même sphère « terrestre » ; chacun d'eux donne une interprétation possible de la position de la sphère dans l'espace :

- dans le dessin 1, on assigne au **plan de projection** la **position verticale**
- dans le dessin 2, on assigne à l'**axe des pôles** la **position verticale**.

Les trois dessins sont coordonnés.

A l'ouverture, le plan de projection et l'axe des pôles sont verticaux : les trois dessins de la sphère « terrestre » sont identiques.

La **commande** permet de faire pivoter la sphère, dans un sens ou dans l'autre, autour du diamètre horizontal situé dans un plan frontal.

Le dessin 1 donne une interprétation du dessin en projection orthogonale dans le cas où le plan de projection est vertical ; on observe l'inclinaison de l'axe des pôles.

Le dessin 2 donne une interprétation du dessin en projection orthogonale dans le cas où l'axe des pôles est vertical ; on observe l'inclinaison du plan de projection.

Remarque

Les dessins 1 et 2 sont **les interprétations les plus fréquentes** du dessin de gauche et sont presque exclusives. Mais on peut également décider que ni la ligne des pôles ni le plan de projection ne sont verticaux : en fait, le dessin détermine seulement l'angle entre ces deux éléments.

IM_16

Cercle inscrit dans un carré

Dessin incohérent et rectifications

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

- **A gauche**, la figure F : un cercle bleu inscrit dans un carré rouge.
- **A droite, dans le cadre rectangulaire bleu**, le dessin en perspective parallèle d'une figure de l'espace constituée d'un plan horizontal vert et de deux plans verticaux perpendiculaires, l'un frontal noir, l'autre de bout bleu.
 - Le plan horizontal vert contient la figure F présentée à gauche ; deux des côtés du carré sont frontaux (et les autres de bout).
 - Deux directions de projection sont indiquées :
 - la direction de la projection 1 en bleu pâle, ni verticale ni horizontale, est contenue dans un plan de bout
 - la direction de la projection 2 en rouge n'est contenue ni dans un plan vertical ni dans un plan horizontal.Les deux directions sont choisies de manière que les centres de l'ellipse et du parallélogramme soient situés sur une horizontale.
 - Le plan frontal noir reçoit :
 - suivant la projection 1, le projeté bleu E du cercle bleu
 - suivant la projection 2, le projeté P du carré, en rouge.

Ce dessin constitue la matérialisation d'une image mentale disponible pour la lecture de l'animation.

- **A droite, au-dessous du cadre**, figure la liste des différentes étapes de l'animation.

Description de l'animation

Première étape : deux iconotypes

L'animation montre, successivement et sans tenir compte de leurs positions relatives :

- l'image E du cercle sur le plan frontal suivant la projection 1
- l'image P du carré sur le plan frontal suivant la projection 2.

On obtient ainsi un iconotype du cercle et un iconotype du carré.

Deuxième étape : dessin incohérent

Les deux iconotypes sont assemblés pour former le dessin d'un cercle inscrit dans un carré ; ce dessin est incohérent car l'ellipse E n'est pas inscrite dans le parallélogramme P alors que dans la figure F le cercle est inscrit dans le carré.

Troisième étape : vers deux dessins cohérents

La rectification peut être réalisée de deux manières à partir du dessin précédent qui, en fait, n'est pas un iconotype (voir en bas de page).

- **Rectification 1** : elle s'obtient en transformant l'iconotype P du carré en un rectangle circonscrit à l'ellipse E ; ce rectangle est l'image du carré par la projection 1. Le dessin cohérent alors obtenu est l'image de F par la projection 1.
 - **Rectification 2** : elle s'obtient en transformant l'iconotype E du cercle en une autre ellipse tangente en chacun des milieux des côtés du parallélogramme P ; cette nouvelle ellipse est l'image du cercle par la projection 2. Le dessin cohérent alors obtenu est l'image de F par la projection 2.
- En effet ce dessin ne se rencontre pas dans les manuels ; par contre un dessin, dans lequel le carré de l'espace contenant le cercle est suffisamment grand pour que les deux iconotypes (parallélogramme et ellipse) ne se coupent pas, est un iconotype.

En effet ce dessin ne se rencontre pas dans les manuels ; par contre un dessin, dans lequel le carré de l'espace contenant le cercle est suffisamment grand pour que les deux iconotypes (parallélogramme et ellipse) ne se coupent pas, est un iconotype.

IM_17

La figure du dessin 2 des annales

Représentation en perspective parallèle variable

Animation en boucle

Description de la fenêtre à l'ouverture

On retrouve le dessin tracé en IM_10 : la figure est représentée dans une perspective parallèle indiquée par le cube de référence représenté en bas à droite.

Le plan frontal choisi passe par le centre de la sphère et contient :

- le cercle rouge, section de la sphère
- le triangle rectangle rouge dont un sommet est sur le cercle rouge ;

le cercle et le triangle sont dessinés en vraie grandeur.

Le dessin comporte en outre :

- deux ellipses bleues représentant le grand cercle horizontal et le cercle parallèle passant par le sommet du triangle
- l'ellipse noire représentant le contour apparent de la sphère
- deux segments verts indiquant le plan horizontal du cercle parallèle.

Description de l'animation

L'animation consiste à faire varier la direction de projection caractérisée par le cube de référence : le cercle et le triangle rouges du plan frontal restent fixes alors que les autres éléments du dessin se modifient.

Dans cette animation, on observe que les deux ellipses bleues, représentant les cercles parallèles de la sphère, restent tangentes à l'ellipse noire représentant le contour apparent de la sphère.

IM_18

Comment rendre cohérent le dessin 2 des annales (IM_10)

Animation en boucle

Description de la fenêtre

A l'ouverture, la fenêtre présente :

- à gauche, un dessin analogue au dessin IM_10 dont les incohérences ont été amplifiées
- à droite en haut, une vue de côté – réduite – de l'objet de l'espace
- à droite en bas, des indications accompagnant l'animation.

Déroulement de l'animation

1. Lecture du dessin

1.1 Les objets

La vue de côté complète le dessin initial et permet d'en suivre la lecture : le triangle et les deux ellipses clignotent successivement pendant que se dessinent les segments qui les représentent sur la vue de côté.

1.2 Analyse et interprétation

a. Pour analyser et interpréter ce dessin, on considère que le dessin est obtenu par une projection sur un plan frontal.

Les deux ellipses bleues représentent deux cercles de la sphère, l'équateur et le parallèle. Dans l'espace, les plans de ces cercles sont parallèles - également inclinés - ni horizontaux, ni frontaux.

Une **première incohérence** apparaît immédiatement : la petite ellipse, qui représente un cercle de la sphère, n'est pas contenue dans le cercle noir, dessin du contour apparent de la sphère.

b. Les ellipses qui représentent les cercles dans des plans parallèles sont de même forme : on doit donc supposer qu'elles sont obtenues par une projection parallèle.

Or le contour apparent de la sphère est un cercle.

Donc cette projection parallèle est une projection orthogonale, ce qui est confirmé par le fait que les deux ellipses ont leur grand axe horizontal.

L'un des sommets du triangle est sur le cercle noir (contour apparent), donc le triangle est dans le plan frontal, plan du contour apparent de la sphère.

D'où la **deuxième incohérence** : le plan du triangle est vertical et ne peut donc être perpendiculaire aux plans des deux cercles qui ne sont pas horizontaux.

Les deux incohérences précédentes sont liées.

Dernière incohérence :

Le parallélogramme vert est censé représenter un rectangle ou un carré du plan parallèle au plan de l'équateur. Mais comme le parallélogramme a deux côtés parallèles au grand axe de l'ellipse, les deux autres devraient être parallèles au petit axe de cette ellipse ; il devrait être rectangle (voir IM_16).

2. Rectification

La vue de côté permet de suivre la rectification par étapes successives pour obtenir un dessin cohérent en projection orthogonale sur un plan frontal.

La rectification met en évidence le lien de dépendance des deux premières incohérences : la rectification est simultanée.

a. On choisit de dissocier le plan du triangle du plan frontal pour lever les deux premières incohérences.

- On conserve la direction des plans des deux cercles « équateur » et « parallèle », direction qui n'est pas perpendiculaire au plan frontal ; les ellipses, dessins de ces cercles, ne changent donc ni de taille ni d'orientation.

- On bascule le plan du triangle jusqu'à le rendre perpendiculaire à la direction des plans des deux cercles. Lors de ce basculement, le dessin du parallèle se déplace, entraîné par celui du triangle, alors que le dessin de l'équateur ne bouge pas. A la fin du basculement, l'ellipse - dessin du « parallèle » - est contenue à l'intérieur du cercle noir représentant le contour apparent ; l'ellipse et ce cercle sont tangents. Le grand cercle, intersection de la sphère avec le plan du triangle, apparaît en rouge.

b. Pour lever la dernière incohérence, le parallélogramme est rectifié en rectangle comme dans le dessin IM_16, projection n°1.

IM_19

Des cercles se projetant selon la même ellipse ***Projection parallèle associée à chaque cercle***

Une commande

Description de la fenêtre à l'ouverture

La fenêtre donne la représentation de la figure de l'espace dans une perspective parallèle.

La fenêtre montre un dessin et un cadre – en brun - lié à la commande.

- Un **cercle** - en bleu - est représenté dans un plan horizontal.

- Une **ellipse** - en noir – est représentée dans un **plan vertical** considéré comme plan frontal. Cette ellipse est la figure projetée du cercle sur le plan frontal dans une projection parallèle dont la direction, située dans un plan de bout, est mise en évidence par des segments rouges.

Les deux axes de l'ellipse, l'un horizontal et l'autre vertical, sont les projetés de deux diamètres perpendiculaires du cercle ; l'un de ces diamètres est parallèle à l'intersection du plan du cercle et du plan frontal : il se projette en vraie grandeur.

- Un cadre - en brun - indique les différentes positions du plan du cercle obtenues en déplaçant le curseur de la commande.

Description de la commande

La commande permet de faire **pivoter le plan du cercle**, initialement horizontal, autour de son intersection avec le plan frontal.

Pour chaque position du plan du cercle, il existe une direction de projection, dans un plan de bout, telle que l'image du cercle sur le plan vertical soit toujours la même ellipse.

La position finale du plan du cercle – curseur de la commande à l'extrémité droite - est la position pour laquelle la direction de projection est horizontale.

IM_20

Dessins de pyramides

Animation en boucle

Description de la fenêtre et de l'animation

Les dessins présentés au cours de l'animation constituent les principaux **iconotypes** de pyramides produits par les élèves ; ces iconotypes sont signalés par un renforcement des traits du dessin.

Les dessins complets qui apparaissent en cours de mouvement sont aussi des iconotypes.

IM_21

Deux dessins d'un cylindre

En perspective centrale et sur les mosaïques d'Ostie

Deux commandes

Description de la fenêtre et des commandes

A l'ouverture, la partie supérieure de la fenêtre présente deux dessins d'un cylindre dont la base inférieure est au niveau du regard (sur la ligne d'horizon). Les parties non visibles du cylindre sont dessinées en traits fins.

Le dessin de gauche est réalisé en perspective centrale ; le dessin de droite est un iconotype (voir IM_05, iconotype 2).

Dessin de gauche en perspective centrale

La commande permet de faire descendre le cylindre au niveau du sol et la lecture de la fenêtre permet de visualiser la transformation correspondante du dessin. La perspective centrale utilisée reste la perspective initiale.

Les bases du cylindre sont représentées par des ellipses ou par une ellipse et un segment selon la position du cylindre par rapport au regard ; au cours de la descente, la visibilité des bases ainsi que la forme des ellipses varient.

Dessin de droite en perspective d'« Ostia antica »

La commande permet de faire descendre le cylindre au niveau du sol.

Le dessin du cylindre descend sans modification ; puis, dans la position finale, le trait du bord supérieur est renforcé pour montrer son entière visibilité ; on obtient ainsi un dessin analogue à ceux des mosaïques d'Ostie.

IM_22

Points de fuite – Villa de Poppée à Oplontis

Un exemple de perspective en araignée

Cette image est réalisée avec le logiciel GeoGebra.

Six commandes indépendantes

Description de la fenêtre

A droite, la fenêtre comporte **une photo** aux couleurs atténuées d'un mur de la villa de Poppée à Oplontis près de Pompéi, (ensevelie sous les laves en 79). Sur cette photo sont soulignées, en noir quelques lignes de fuite de la fresque. Cette fresque est sensiblement symétrique.

A gauche, **six curseurs** peuvent être manipulés indépendamment.

Utilisation des commandes

Les cinq premiers curseurs permettent, par déplacement vers la droite, de prolonger les lignes de fuite soulignées ; on efface les prolongements en ramenant chacun des curseurs à gauche.

Le sixième curseur trace l'axe de symétrie de la fresque.

Remarques

Le premier curseur, rouge, montre la convergence de six lignes de fuite ; ce qui pourrait laisser croire que les autres lignes convergent vers le même point, selon les lois de la perspective centrale. Il n'en est rien comme le montre la manipulation des autres curseurs.

Seule la symétrie par rapport à un axe vertical est respectée. On obtient une superbe **perspective en araignée**.

On peut constater en effet que les lignes les plus proches du centre de la fresque sont convergentes. Par contre, à chacun des niveaux sol ou plafond, les lignes sur le côté restent sensiblement parallèles aux lignes centrales du même niveau.

IM_23

Le cercle de contour apparent d'une sphère photographiée

Une commande

Description de la fenêtre

- **Ligne supérieure**

Le dessin est la coupe d'une sphère et d'un appareil photographique schématisé, coupe contenant le centre de la sphère et le centre de l'objectif. Ce dessin peut aussi être considéré comme la **vue de côté** d'une sphère et d'un appareil photographique.

Dans cette vue de côté, le cercle - contour apparent de la sphère pour l'appareil photo dans la prise de vue – est représenté par le segment rouge et son image sur la plaque photographique par le segment bleu foncé.

- **Ligne inférieure**

Le dessin de gauche représente le cercle de contour apparent de la sphère en vue de face. Le dessin de droite représente, dans une autre vue de face, l'image de la sphère sur la plaque photographique. Les deux dessins, situés dans deux plans strictement parallèles, sont en dimension réelle.

En superposant ces deux dessins, on obtient une vue de face formée du cercle de contour apparent de la sphère et de son image sur la plaque photographique. (Voir dessins dans « Mathématiques », ch 7-IM § 6.1 « Schématisation ».)

Description de la commande

La commande permet de rapprocher ou d'éloigner l'appareil photo de la sphère et de visualiser les variations du contour apparent et de l'image.

IM_24

Construction de l'image d'un globe terrestre par projection centrale et par projection orthogonale ; comparaison

IM_24a Projection centrale : processus de construction

IM_24b Projection centrale : image de la partie visible

IM_24c Projection orthogonale : image de la partie visible

IM_24d Comparaison des images d'un globe terrestre par projection centrale et projection orthogonale

IM_24a

Projection centrale : processus de construction

Animation en boucle

Deux commandes

Objectif

Faire apparaître dans une **projection centrale** le dessin complet du globe terrestre, c'est-à-dire le contour apparent, les pôles et l'équateur.

Le dessin obtenu, dont les éléments cachés à l'observateur sont en traits plus fins, n'a pas d'axe horizontal de symétrie.

Description de la fenêtre à l'ouverture

La fenêtre comporte deux parties, séparées par une tresse verticale gris pâle, destinées à recevoir deux dessins coordonnés.

À gauche de la tresse, le globe et le plan de projection sont représentés en vue de côté ; cette vue peut être interprétée comme une coupe par un plan diamétral du globe.

À droite de la tresse, l'espace est destiné à recevoir le dessin obtenu sur le plan de projection.

Description des commandes

- La commande « **inclinaison de l'axe** » permet de choisir l'inclinaison de l'axe des pôles, et par conséquent l'inclinaison du plan de l'équateur.

- La commande « **plan de projection** » permet de choisir la place du plan de projection par rapport à l'objet. Le déplacement du plan de projection influe sur la taille du dessin de droite.

Pour utiliser les commandes, il est préférable d'interrompre l'animation, par un clic dans l'image, puis de la relancer par un nouveau clic

Déroulement de l'animation

Sur le dessin de gauche se dessinent successivement les projetantes associées aux différents éléments caractéristiques du globe (contour apparent, pôles et points particuliers de l'équateur). Ces projetantes, en utilisant des lignes de rappel horizontales partant du plan de projection, permettent la construction de ces éléments sur le dessin de droite.

Puis les projetantes et les lignes de rappel disparaissent en laissant à gauche la vue de côté, et à droite l'image du globe dans la projection centrale.

IM_24b

Projection centrale : image de la partie visible

Animation

Deux commandes

Objectif

Dessiner les images des seuls éléments visibles pour l'observateur dans une **projection centrale**.

Déroulement

La construction est identique à celle de IM_24a.

Seuls les éléments du globe visibles pour l'observateur sont dessinés dans une **projection centrale** dont le centre est l'œil de l'observateur.

Dès que le plan du contour apparent du globe est déterminé, les éléments situés au-delà de ce plan sont effacés et seuls les dessins des éléments en avant du plan du contour apparent sont construits.

Le code de couleurs est identique à celui de IM_24a.

IM_24c

Projection orthogonale : image de la partie visible

Animation

Deux commandes

La projection utilisée ici est une **projection orthogonale**. Le processus de construction est analogue à celui qui est utilisé en IM_24b. Seuls sont retenus les éléments en avant du plan de contour apparent pour la **projection orthogonale**.

Le déplacement du plan de projection est sans influence sur le dessin de droite.

Le code de couleurs est identique à celui de IM_24a.

IM_25

Dessin d'une sphère « terrestre » en perspective centrale

Trois commandes

Description de la fenêtre et des commandes

La fenêtre comporte à gauche le dessin principal, à droite une vue de côté réduite et un tableau de commandes.

• Vue de côté partielle de dimension réduite (dessin de droite)

Sur la vue de côté réduite sont représentés :

- la sphère « terrestre » munie de son axe des pôles
- le point de vue (œil)
- le plan de projection passant par le centre de la sphère.

L'œil se trouve sur la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan de projection.

• Les trois commandes

La **commande 1 - déplacement du centre de la projection** permet de modifier la perspective centrale par le déplacement du point de vue.

Les **autres commandes concernent la sphère « terrestre »** : elles permettent de modifier l'inclinaison de la ligne des pôles et la longitude du méridien.

• Lecture de la figure (dessin de gauche)

Pour toute position du centre de projection (point de vue), c'est-à-dire pour toute position de la **commande 1 - déplacement du centre de la projection**, le projeté du contour apparent est un cercle (en noir) dont le diamètre est supérieur à celui de la sphère.

Pour lire la figure, à cause de l'absence de ponctuation du dessin, il faut imaginer que la partie basse de l'équateur (en rouge) est visible et en déduire la partie visible du méridien (en vert).

La **commande 2 - inclinaison de la ligne des pôles** déplace l'axe des pôles dans un plan de bout.

- En déplaçant la commande vers la gauche, le pôle Nord bascule vers le haut jusqu'à la position verticale de l'axe des pôles, et l'équateur est alors représenté par un segment.
- En déplaçant la commande vers la droite, le pôle Nord bascule vers l'avant jusqu'à la position horizontale de l'axe des pôles, la partie avant de l'équateur basculant vers le bas. Lorsque la commande est à l'extrémité droite, l'équateur est représenté par un cercle du plan de projection, et le méridien est représenté par un segment, diamètre du contour apparent.

La **commande 3 - longitude du méridien** détermine la position du méridien qui est représenté dans certains cas particuliers par un segment ou par un cercle.

IM_26

Dessin d'une sphère « terrestre » en projection orthogonale

Deux commandes

Description de la fenêtre et des commandes

La fenêtre comporte à gauche le dessin principal, à droite une vue de côté réduite et un tableau de commandes.

• Vue de côté partielle de dimension réduite (dessin de droite)

Sur la vue de côté réduite sont représentés :

- la sphère « terrestre » munie de son axe des pôles et de son équateur
- la direction de projection
- le plan de projection.

• Les deux commandes

Les commandes concernent la **sphère « terrestre »** : elles permettent de modifier l'inclinaison de la ligne des pôles et la position du méridien.

• Lecture de la figure (dessin de gauche)

Le cercle noir représente le contour apparent de la sphère ; son diamètre est celui de la sphère.

Pour lire la figure, à cause de l'absence de ponctuation du dessin, il faut imaginer que la partie basse de l'équateur (en rouge) est visible et en déduire la partie visible du méridien (en vert).

La commande 1 - inclinaison de la ligne des pôles déplace l'axe des pôles dans un plan de bout.

- En déplaçant la commande vers la gauche, le pôle Nord bascule vers le haut jusqu'à la position verticale de l'axe des pôles, et l'équateur est alors représenté par un segment.

- En déplaçant la commande vers la droite, le pôle Nord bascule vers l'avant jusqu'à la position horizontale de l'axe des pôles, la partie avant de l'équateur basculant vers le bas. Lorsque la commande est à l'extrémité droite, l'équateur est représenté par un cercle rouge qui coïncide avec le cercle noir du contour apparent et le méridien est représenté par un segment.

La commande 2 - longitude du méridien détermine la position du méridien qui est représenté dans certains cas particuliers par un segment ou par un cercle.

IM_27

Intersection de deux sphères

Dessin en projection orthogonale

Quatre commandes

Description de la fenêtre à l'ouverture

Sur la ligne supérieure, la fenêtre présente un cadre contenant quatre commandes :

- rayon de la première sphère
- rayon de la deuxième sphère
- distance des centres
- direction de la droite des centres.

Sur la ligne inférieure, en vue de face et en vue de dessus réduite, la fenêtre présente la représentation de deux sphères sécantes, de rayons différents, dont la **droite des centres est horizontale**.

Chacune des deux sphères est représentée :

- en projection orthogonale sur un plan frontal par son contour apparent : vue de face (dessin de gauche)
- en projection orthogonale sur un plan horizontal : vue de dessus réduite (dessin de droite).

La vue de dessus montre les positions respectives des deux sphères sécantes.

Le cercle d'intersection des deux sphères est représenté en vue de face par l'ellipse rouge.

Les commandes

Les quatre commandes permettent de mettre en évidence, en projection orthogonale, les différentes positions des deux sphères et les représentations de leur intersection.

• Les rayons des deux sphères étant fixés, on peut faire varier la distance des centres de manière à obtenir les différentes positions relatives : sécantes, tangentes, intérieures, extérieures. La vue de dessus permet de repérer ces différentes positions et la vue de face permet d'obtenir le dessin correspondant en projection orthogonale.

• Les deux sphères étant en position de sphères sécantes, on peut faire varier l'un des rayons pour observer, en vue de face, l'évolution de la représentation de leur intersection.

La représentation du cercle d'intersection en vue de face (lorsque l'intersection existe) est en général une ellipse rouge tangente aux deux contours apparents, ou tangente à l'un des deux, ou intérieure aux deux.

• Les deux sphères étant en position de sphères sécantes, on peut faire varier la direction de la droite des centres pour faire apparaître des représentations particulières en vue de face de l'intersection.

En donnant la direction frontale à la droite horizontale des centres, grâce à la commande « direction de la droite des centres » en position 1 ou 3, l'intersection est représentée par un segment rouge.

En donnant la direction de bout à la droite horizontale des centres, grâce à la commande « direction de la droite des centres » en position 2 ou 4, l'intersection est représentée par un cercle rouge.