A geometria tanítása és tanulása, és a geometriai paradigmák

Alain Kuzniak
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Laboratory of Didactics André Revuz
University Paris Diderot
France

Varga Tamás Napok
Budapest 2013 november

A matematika- és a geometriatanulás hasznának örökké új kérdése

Arbuthnot egy esszéje 1701-ből

1. Hogy fejlesszük az értelmet és a gondolkodást
   “Az igazság olyan a megértésnek, mint a zene a fülnek, a szépség a szemnek”
2. Különféle területeken való alkalmazásai miatt (kereskedelem, navigáció, hadászat...)
3. Hogy ne csak az eredményeket tanuljuk meg, hanem azt is, hogyan érjük el őket.
   Módszer arra, hogy megszabadítsuk az elmét a babonáktól.

Á Bas Euclide – Le Euklidésszel

Néhány egymásnak ellentmondó nézőpont

1. Modern matematika: Dieudonné provokatív szlogenje a hagyományos háromszög-alapú geometria és a modern geometria közti távolsága hívja fel a figyelmet.
2. Ellenreformáció: Le Euklidésszel, aki nem nyújt királyi utat a geometria való világban történő alkalmazásaihoz.

A geometriatanítás fejlesztése, és kutatások a geometria didaktikájának terén

Sajátos kontextusban

1. Feszültség haszonelvű és idelalista nézőpontok között
2. Új rajzeszközök használata, amelyek átalakítják a felfedezés és a bizonyítás módszereit
3. Az állampolgárok “geometriai műveltségének” átformálása, mely újraértelmezi az Igazság és a Bizonyítás viszonyát

Conferences of European Research in Mathematics Education

1. A térbeli tájékozódási képességek és a geometriai gondolkodás fejlődése az oktatás különböző szintjein.
2. A geometria tanítása és a “való világ”: geometrizáció és alkalmazások.
3. Eszközök fejlődése: “készítmények” (artefacts), pl. számítógépek és ezek használata.
4. Magyarázat, érvelés és bizonyítás a geometria tanításában.
5. Néhány elméleti szempont: Van Hiele-féle szintek; Szemiotikai reprezentáció regiszterei; geometriai paradigmák.

A geometriatanítás fejlesztése, és kutatások a geometria didaktikájának terén

Megfelelő elméleti keretek kialakítása

1. Az elemi geometria tanításához és tanulásához
   - A közoktatás folyamán
   - A tanárképzésben
2. A geometria tanításának összehasonlításához különböző intézmények és országok között
3. A központi fogalomnak tekintett “geometriai munkára” összpontosítva

A matematikai munka a vizsgálódások középpontjában

Freudenthal nézete

Mi a matematika? Önök természetesen tudják, hogy a matematika tevékenység, hiszen Önök gyakorló matematikusok. A matematika a problémamegoldás, a problémák keresésének gyakorlata, ugyanakkor egy anyag rendszerezésének gyakorlata is. ESM 1971

Matematikai munka és tevékenység: Habermas

Munkán vagy valamilyen célra irányuló racionális tevékenységen vagy valamilyen eszközzel végzett tevékenységet vagy racionális választást értek, vagy e kettőnek a kombinációját

Freudenthal ESM 3 1971

A matematikai tevékenység nagy része manapság rendszerezés. Ez egyszerre jó és rossz gyakorlat: tevékenységünk eredményét merev rendszerré fagyasztjuk, mert ez objektív, racionális és mert szép, és ez az, amit tanítunk.

A munka kontextusa és fázisai

A munka kontextusa : Reichenbach

1. A felfedezés kontextusa
2. Az igazolás kontextusa
3. *A használat kontextusa*

A munka fázisai

1. Felfedezés
2. Az eredmény bemutatása
3. Az eredmények megszokása, begyakorlása

A Geometriai munka tere

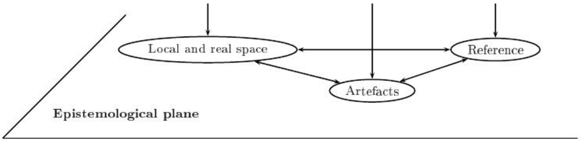
Egy geometriai munkatér (GMT) egy úgy elrendezett hely, hogy az lehetővé tegye a geometriai munkát (egy oktatási helyzetben).
Két dimenzión alapul

- Egy episztemológiai (ismeretelméleti) szinten
- Egy kognitív szinten

Az episztemológiai szint

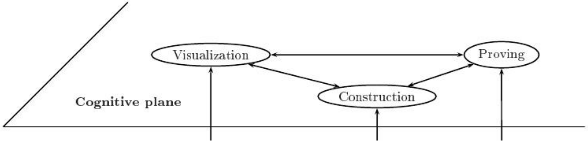
A következő három összetevő hálózata:

- Egy valódi, lokális tér mint materiális segédeszköz, konkrét, megfogható tárgyak egy halmazával kiegészítve
- “Készítmények“ egy halmaza, mint pl. rajzeszközök vagy egy szoftver
- Egy referenciaként szolgáló keretelmélet, mely definíciókon és tulajdonságokon alapul

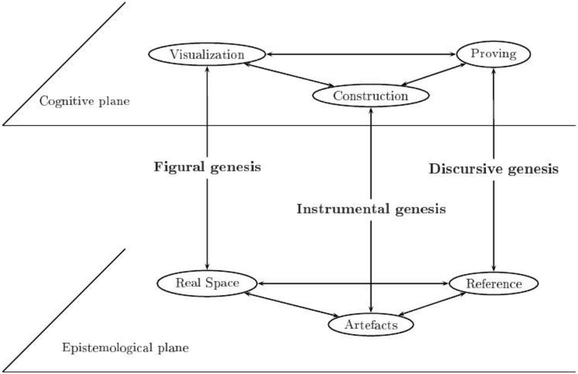


A kognitív szint

- Egy vizualizációs folyamat, mely a tér és a materiális segédeszközök megjelenítéséhez kapcsolódik
- Egy konstrukciós folyamat, melyet az eszközök (körző, vonalzó stb.) és geometriai alakzatok határoznak meg
- Egy diszkurzív folyamat, mely következtetéseket és bizonyítást szolgáltat

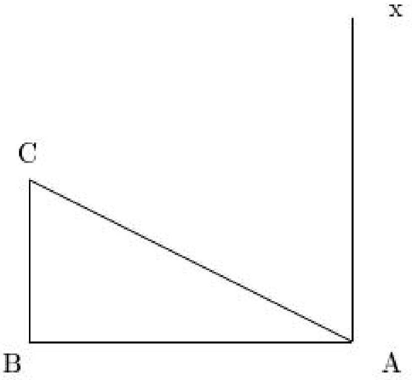


Hogyan rendezzük el az egyes szinteket?
Hogyan teremtsünk kapcsolatot a két szint között?
Mi irányítja a munkát?



Ami a munkát irányítja : A paradigmák keresése

Legyen ABC egy B-ben derékszögű háromszög, amelyben $AB = 4cm$ és $BC = 2cm$. Az Ax félegyenes merőleges az AB egynesre. M legyen az Ax félegyenes egy pontja. Kérdés, hogy milyen alakú lehet az AMC háromszög.



Kérdés: Létezik-e olyan M pont, amelyre ACM egyenlő oldalú? Igazolja válaszát

Egy tanuló válasza

A helyes válasz “nem”, és körzővel meg lehet mutatni, hogy az AC oldalra emelt egyenlő oldalú háromszög harmadik csúcsa nincs az Ax félegyenesen.

Egy jellegzetes I. Geometria-beli válasz

A tanuló egy valós, érzékelhető világbeli kísérletet hajt végre: rajzeszközökkel megszerkeszt egy háromszöget. Ezután megállapítja, hogy nem esik megfelelő pont a félegyenesre.

A francia középiskolában elvárt válasz

Ha ACM olyan egyenlő oldalú háromszög, melynek M csúcsa Ax-re esik, akkor az $\widehat{MAC}$ szög nagysága $60°$ (a háromszög szögeinek összege), a $\widehat{CAB}$ szögé $30°$, és szimmetriai okokból a $\widehat{CAC'}$ szög nagysága is $60°$ (C' pont C-nek AB egyenesre tükrözött képe). Mivel CAC' háromszög A-ban egyenlőszárú (szimmetria miatt), ezért egyenlő oldalúnak kéne lennie.
Ez azonban nem igaz, mivel $C'C$ 4 egység, ami nem egyenlő CA-val és $C'A$-val ($2.\sqrt{5}$ a Pitagorasz-tétel miatt).

Egy tanárjelölt válasza

Ez úgy magyarázható meg, hogy egy egyenlő oldalú háromszögnek minden szöge egyenlő, és a szögek összege 180°. Az egyes szögek nagysága 60°. Ebben az esetben, ha szögmérővel mérünk, megállapíthatjuk hogy $\widehat{CAM}$ nagyobb mint 60°, valójában $\widehat{CAM} = 64^\circ$.

A példa két fontos dologra mutat rá

- Az elemi geometriát többféle nézőpontból lehet vizsgálni, és ezek ugyanarra a problémára egymással össze nem férő megoldásokat adnak
- Bizonyos kifejezések (pl. szerkesztés) ugyanannak a kérdésnek az összefüggésében mást jelenthetnek a tanár és a diák számára

A geometriai paradigma fogalma segít megérteni és rendszerezni ezeket a különböző nézőpontokat.

.

CERME3 : Houdement and Kuzniak

Geometriai paradigmák

Két munkahipotézis

1. Az oktatásban ugyanaz a geometria terminus különféle paradigmákat idéz meg. Ezek a paradigmák nagyjából tükrözik a különböző oktatási szintek között megfigyelhető töréseket a geometria tanítása és tanulása folyamán.
2. A diákok, a tanárok és a tanárszakos hallgatók különböző paradigmákban dolgoznak: ez az episztemológiai különbség pedig megmagyaráz bizonyos didaktikai félreértéseket.

Geometriai paradigmák

Geometriai paradigmák kutatása

A paradigma fogalmával Kuhn úgy bővítette egy elmélet fogalmát, hogy belefoglalta egy olyan közösség tagjait, akik osztanak egy közös elméletet.
Egy paradigma az, amit egy tudományos közösség tagjai osztanak, és egy tudományos közösség olyan emberekből áll, akik osztanak egy paradigmát (Kuhn A tudományos forradalmak szerkezete 1962)

Geometriai paradigmák

Két jelentés

1. Általánosabb értelmében a paradigma hitek, értékek, technikák stb. összessége, melyeket egy adott tudományos közösség minden tagja oszt.
2. Másik értelmében ennek az összességnek egyfajta elemét jelöli, konkrét problémamegoldásokat, amelyek explicit szabályok helyett, mintaként vagy példaként alkalmazhatók a normál tudomány fennmaradó problémáinak megoldása során.

Háromféle elemi geometria

I. Geometria Természetes Geometria
avagy geometria és valóság összemosódása

II. Geometria Természetes Axiomatikus Geometria
avagy a geometria mint a valóság egy sémája

III. Geometria Formális Axiomatikus Geometria
avagy geometria és valóság függetlensége

I. Geometria

- A geometria összefonódik a valósággal.
- A valóság lerajzolása, és a rajzok mint valós objektumok.
- A közelítő számítások és a mérés kérdése

II. Geometria

- Olyan geometria, mely szorosan kötődik a való világhoz, annak egy modelljét alkotja
- A valóság sémáin alapuló érvelés
- Az axiomatizálás mint látóhatár

III. Geometria

- Az axiómarendszer ellentmondásmentességének és teljességének kérdése
- Az axiomatikus elrendezés kérdése
- Igazság és bizonyosság elszakadnak egymástól

Geometriai paradigmák

Nincs szó rangsorolásról ezek között a geometriák között. Más perspektívának, más szempontoknak felelnek meg, ennek megfelelően változik a természetük és a problémák kezelésére szolgáló eszközeik

I. Geometria Technikai és praktikus

II. Geometria Axiomatikus és modellező

III. Geometria Logikai és formális

A geometriai munka tereinek sokfélesége

A referencia-GMT, átalakításának okai

Ez a munkatér alapvetően matematikai kritériumokon nyugszik, de társadalmi, gazdasági és politikai kritériumoktól is függ.

Tudományos értekezéseken és tanterveken alapuló vizsgálatok

Episztemológiai éberség

A geometriai munka tereinek sokfélesége

Személyes GMT

Amikor egy konkrét személy (egy tanuló, egy egyetemista vagy a tanár) szembesül egy problémával, nem pedig egy ideális tudós, akkor ő azt a személyes GMT-ével kezeli.

A kognitív sík egy konkrét egyén sajátja, nem pedig egy ismeretelméletileg vagy egy intézmény által meghatározott fiktív személyé.

Tanárok és diákok koncepciói, tudása:

Kognitív éberség

A geometriai munka tereinek sokfélesége

A megvalósított GMT avagy a didaktikai kérdés

Amikor az általános paradigma elfogadásra került és a referencia-GMT már fel van építve, akkor a geometria tanításához még ki kell alakítani egy olyan GMT-t, mely alkalmas az oktatási rendszerben elvárt geometria közvetítésére.

A geometriai munkatér csak akkor megfelelő, ha a felhasználót képessé teszi a munkateret meghatározó három összetevő összekapcsolására és kezelésére. Tanterv, tankönyvek, osztálytermi megvalósítás

Didaktikai éberség

Példa koherens I. Geometriára

Alfonso most ért haza az Prekordillerákon tett útjáról, ahol megnézett egy a családja érdekeltségébe tartozó négyszög alakú mezőt. Meg szeretnénk becsülni ennek a területét. Ehhez az útja során egymás után megmérte a mező négy oldalát, és azt, találta, hogy körülbelül 300m, 900m, 610m, 440m hosszúak. A terület meghatározásáig még nem jutott el. Az osztálytársaiddal együtt dolgozva próbálj segíteni Alfonsónak a mező területének meghatározásában.

Példa koherens I. Geometriára

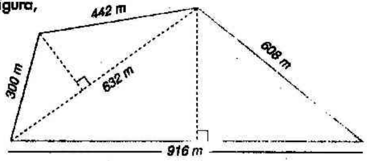
A feladat később a következő útmutatással egészül ki: Eláruljuk, hogy miközben dolgoztatok, Alfonso elmagyarázta a problémáját egy barátjának, Rayennek, aki a mező egy további nagyságát kérte tőle: az átló hosszát.
Alfonso visszatért ezzel az adattal: 630 m.
Jól csinálta? Most tudnánk segíteni neki, ha eddig nem sikerült?

Az ábra részekre bontása és számolás az ábrán végzett mérések alapján

¿Puedes estimar el área de la parcela de la figura, a partir de las mediciones indicadas?

Solución: Podemos descomponer la parcela en pedazos triangulares como los indicados y reconstruir estos triángulos a partir de las mediciones tomadas.

¿Cómo calculamos ahora el área?



Hogyan számíthatjuk ki most a területet? Meghatározzuk a rajz méretarányát, megmérjük a megjelölt hosszúságokat, és kiszámoljuk az egyes háromszögek területét (az alapok hosszát megszorozva a megfelelő magasságok felével).

Közelítő értékkekkel való számolás a geometriában

Eláruljuk, hogy Horatio körülbelül 130 000 m^2-t számolt. Amikor Rayen ezt meghallotta, azt mondta, ez nem lehet, ennek a kétszerese az eredmény!
Szerinted kinek van igaza? Meg tudnád becsülni az eredményt?

Te podemos contar que a tu compañero Horacio, le dio 130.000 m^2, aproximadamente, es decir 13 hectáreas. Cuando Rayén escuchó esto, dijo: ¡No puede ser! ¡Es como el doble de eso!
¿Serías capaz, como Rayén, de estimar "a simple vista" el área total?

A nosotros nos dio un área total de 240.600 m^2 o 24,6 hectáreas, aproximadamente. ¿Y a ti?

A közelítő értékekkel való számolás a geometriában szorosan összefügg a mérés lehetőségével

A dinamikus szoftverek hatása a geometriai munka terére
a szoftverek tömeges használata előtt

1. Egyes alakzatok szerkesztése rajzeszközökkel
2. Mérések végzése az ábrákon műszerek segítségével
3. Sejtések megfogalmazása
4. Egy tulajdonság bevezetése, melyet ezután elfogadunk vagy bebizonyítunk

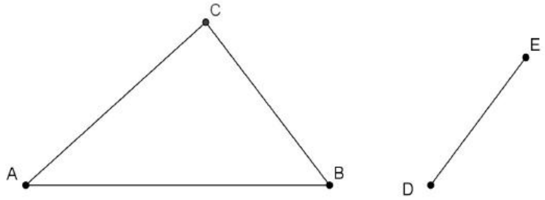
A dinamikus szoftverek hatása a geometriai munka terére

1. Egy ábra megalkotása dinamikus szoftver segítségével
2. Szoftver által végzett mérés
3. Néhány pont mozgatása azt vizsgálva, hogy egy tulajdonság igaz marad-e
4. Egy tulajdonság bevezetése, melyet ezután elfogadunk vagy bebizonyítunk

Hasonló háromszögek egy átlagos 10. osztályban

Hozz létre egy DEF háromszöget úgy, hogy $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ és $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ legyen.

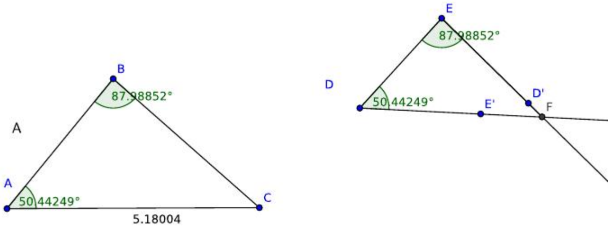
Partie I : Créer un triangle DEF tel que $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.



- Mit mondhatunk $\widehat{ACB}$ és $\widehat{DFE}$ szögekről?
- Hasonlítsd össze vonalzóval a háromszög oldalait: mit veszel észre?
- Egészítsd ki a szöveget: Megfigyelhetjük, hogy ha két háromszögnek van ..., akkor az oldalaik ...

Hasonló háromszögek egy átlagos osztályban Szoftverrel

Hozz létre egy DEF háromszöget úgy, hogy $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ és $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ legyen.



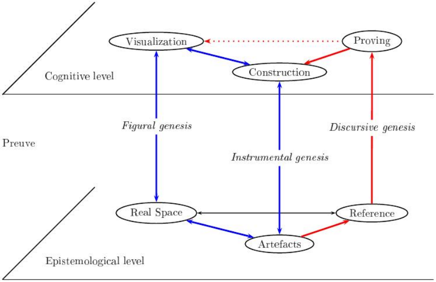
Az általános félreértés, avagy amikor a megmutatás bizonyítássá válik

- Tanár: Bebizonyítottuk a tulajdonságot?
- Diákok: Igen, elvégeztük a bizonyítást.
- Tanár: Nem, ez nem elég precíz.

Törés a geometria két megközelítése között

A tanár számára

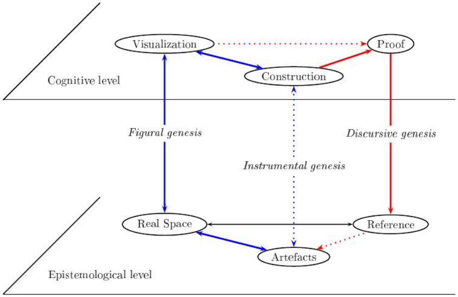
- A szerkesztés egyszerű és nem fog nehézséget okozni.
- A II. Geometriába való belépést I. Geometriabeli munkával motiválja: a formális bizonyítás motiválása céljából
- A rajzot generikus ábrának tekinti



Törés a diákok személyes GMT-ével

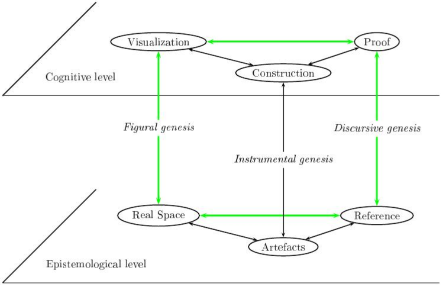
Számukra

- A rajzeszközökkel való szerkesztés komplex és sokáig tart
- A sokféle eredmény következtében a diákok különféle tulajdonságokat vesznek észre
- Általánosítás nélküli, konkrét ábra



Félreértés és didaktikai szerződés

- a diákok által végzett szerkesztéssel a tanár nem foglalkozik
- A szoftver az igazság forrása
- A sejtés az alapja az egyetértésnek
- Tapasztalaton alapuló bizonyítás és axiomatikus bizonyítás



Félreértés és didaktikai szerződés

Félrevezető elmozdulás az I. Geometria felé

- A referencia-GMT mindig a GI-ből GII felé történő átmenetre helyezi a hangsúlyt
- A standard megvalósított GMT instabil és a diákok szintjétől függ
- Az I. Geometria felé történő elmozdulást támogatja a szoftver, amely megadja a “bizonyítást”
- Hiányzik egy a tanítást megalapozó elméleti rendszer
- A tanár megkísérli újrarendezni a GMT-t, hogy igazodjon a diákok feltételezett alacsony szintjéhez.
- Az episztemológiai éberség hiánya a kognitív éberség elvesztéséhez vezet.

Perspektívák

- Fenntartani a reményt
- Koherens és általános GMT-k építése az adott intézményeknek megfelelően
- Gazdag, jól strukturált GMT-vel körülvett I. Geometria kialakítása (GI/GII)
  - Nem töredezett és más területekhez kapcsolódik
  - Közelítő számításokkal végzett munka
- A geometrián túlmenően gondolkodni egy gazdag és valóságos geometriai kultúra elérése érdekében

Kutatások

- Geometria és a matematika egyéb területei
  - Geometria és számok: Valós és komplex számok és geometrizálás.
  - Geometriai szituációkon alapuló modellezési problémák számítógépek segítségével –> Analízis, függvények és bizonyítás...
- Az elméleti keretről és annak segítségével végzett kutatás
  - A különböző eredetekről.
  - a területek és a regiszterek összekapcsolása: a Matematikai Munka Tere (ETM)
  - Mindenkit szeretettel várunk Madridban az ETM4 szimpóziumon

Merci Köszönöm

Mes remerciements particuliers à Sári Pálfalvi pour son invitation à donner cette conférence et à Katalin Gosztonyi pour sa traduction en hongrois.