Alain Kuzniak, Philippe R. Richard

Espaces de travail mathématique. Points de vue et perspectives

Ce numéro spécial de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME) est entièrement issu des propositions d'articles élaborées dans la foulée du troisième symposium ETM consacré à l'étude, au développement et aux usages possibles de la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) en didactique des mathématiques. Le travail mathématique et son fonctionnement dans le cadre scolaire sont à la base de l'approche par les ETM et, dans cette introduction, avant de présenter l'organisation thématique des contributions, nous résumons cette approche théorique. Celle-ci se propose, de manière non normative, d'enrichir l'étude didactique du travail mathématique des élèves et des professeurs.

1. Une perspective didactique sur le travail mathématique

L'enseignement des mathématiques a connu une profonde remise en question à partir des années soixante et ceci dans le monde entier. Avant cette période, les systèmes scolaires offraient deux types d'enseignement aux citoyens des pays développés. Aux enfants des milieux populaires était proposé un enseignement court et essentiellement utilitariste des mathématiques élémentaires. Les enfants de la bourgeoisie, destinés à prendre en main l'économie et la gestion du pays, avaient la possibilité d'accéder à un enseignement des mathématiques vues comme une école du raisonnement logique. Dans les deux cas, l'élève était placé en position de récepteur d'un savoir dispensé par des maîtres. À partir des années soixante, divers phénomènes ont contribué à changer les points de vue sur le rôle des mathématiques et sur la façon de les enseigner. Sans viser à l'exhaustivité, on peut signaler la réforme des mathématiques modernes, le développement des recherches sur les apprentissages des enfants ou encore, la massification de l'enseignement dans un contexte de concurrence économique et idéologique.

Pour notre propos, nous retiendrons deux profondes caractéristiques des changements qui se sont accentués depuis : d'une part, la mise en évidence de la diversité du travail du mathématicien vu comme l'acteur principal de la progression mathématique et, d'autre part, l'idée pédagogique de promouvoir l'activité de l'élève pour le rendre plus apte à développer ses connaissances dans un contexte de résolution de problèmes. Dans chaque cas, le travail mathématique est au cœur de l'évolution, ce qui conduit logiquement à donner à cette notion une place centrale en didactique des mathématiques.

Le travail auquel nous nous référons porte sur une activité rationnelle orientée vers un but particulier et pouvant s'appuyer ou non sur l'usage d'un certain nombre d'instruments et d'artéfacts spécifiques. En mathématiques, le but de cette activité sera centré sur les objets étudiés par les mathématiciens, « ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques » (Thurston, 1995, p. 29). Nous considérons alors que la recherche didactique doit s'interroger sur ce travail du double point de vue de l'apprentissage par les élèves et de l'organisation de cet apprentissage par le professeur, dans le cadre d'un enseignement favorisant le développement du travail mathématique de l'élève.

2. La notion d'Espace de Travail Mathématique

La notion générale d'Espace de Travail Mathématique (ETM) étend la notion d'espace de travail pour la géométrie, introduite par Kuzniak et Houdement (Kuzniak, 2006) dans l'étude de la didactique de ce domaine. Elle a été mise au point afin d'aider à mieux comprendre les enjeux didactiques autour du travail mathématique dans un cadre scolaire. L'espace ainsi conçu désigne un environnement pensé et organisé pour permettre le travail des individus résolvant des problèmes mathématiques. Dans le cas des mathématiques scolaires, ces individus ne seront généralement pas des experts, mais des élèves ou étudiants, confirmés ou débutants.

De l'étude particulière de la géométrie, nous retenons le principe d'articuler dans l'ETM deux niveaux (Kuzniak, 2011), l'un de nature épistémologique, en rapport étroit avec les contenus mathématiques du domaine étudié, et l'autre, de nature cognitive, qui concerne la pensée du sujet résolvant des tâches mathématiques.

Le travail mathématique résulte alors d'un processus qui va permettre de donner progressivement un sens, d'une part, à chacun des niveaux épistémologique et cognitif et, d'autre part, d'articuler ces deux niveaux grâce à différentes genèses. Dans le cas de la géométrie, l'ensemble du processus a pu être décrit à partir des éléments du diagramme suivant (Fig. 1), mais celui-ci nécessitera certaines modifications pour l'adapter au cadre général des ETM :

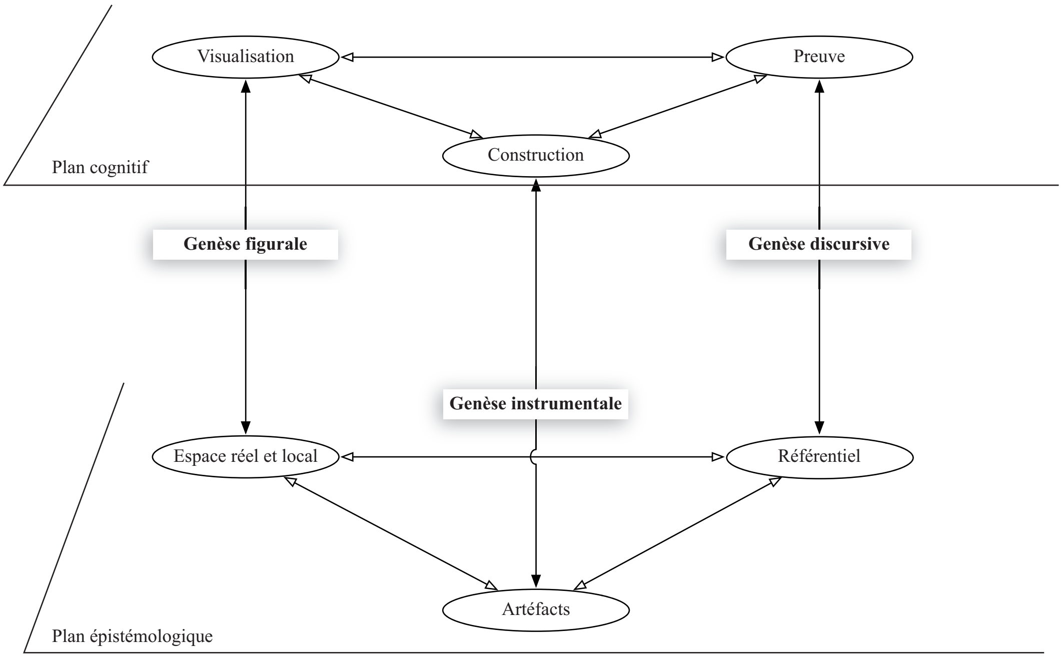

Figure 1 - L'espace de travail géométrique et ses genèses

2.1 Le niveau épistémologique et ses composantes

En ce qui concerne la géométrie, trois composantes en interaction sont caractéristiques de l'activité géométrique dans sa dimension purement mathématique :

– un espace réel et local comme support matériel, avec un ensemble d'objets concrets et tangibles ;
– un ensemble d'artéfacts tels que des instruments de dessin ou des logiciels ;
– un système théorique de référence basé sur des définitions et des propriétés.

Ces composantes ne sont pas juxtaposées, elles doivent être organisées selon un but déterminé qui va dépendre du domaine mathématique dans sa dimension épistémologique. Lorsque l'accent est mis sur le processus d'apprentissage de l'élève dans une situation didactique, ce plan épistémologique peut aussi se considérer comme un *milieu épistémologique* (Coutat et Richard, 2011).

Si les artéfacts et le référentiel théorique restent deux composantes de base de tout plan épistémologique associé à un domaine mathématique particulier, la composante liée à l'espace et aux configurations géométriques doit être modifiée pour l'étendre à d'autres domaines mathématiques. En accord avec une conception des mathématiques fondées sur des représentations sémiotiques qui va au-delà de la seule considération de systèmes de représentation, il semble pertinent d'utiliser la notion de signe ou *representamen,* au sens de Peirce. Ainsi, le signe ou le *representamen* est une « chose » qui en représente une autre que ce soit son objet ou peut-être aussi lui-même. Suivant le domaine mathématique concerné, les signes pourront être des dessins géométriques, des symboles algébriques ou des graphiques, voire des jetons, des maquettes ou des photos dans le cas de problèmes qui mettent en jeu de la modélisation. À la différence des signes de structure dyadique qui ne retiennent que la relation de référence entre le signifiant et l'objet représenté, l'idée d'un signe qui est aussi sa propre représentation invite à revisiter le processus sémiotique lorsque le travail mathématique est en jeu. Ceci est notamment visible lorsqu'un dessin géométrique, qui est lui-même une forme, est à la fois *representamen* et modèle de représentation (Coutat, Laborde et Richard, 2013).

2.2 Le niveau des processus cognitifs

La mathématique enseignée n'est pas un corpus désincarné de propriétés et d'objets réduits à des signifiants manipulables par des systèmes formels, elle est d'abord et principalement une activité humaine. Ainsi, il est essentiel de comprendre comment des communautés d'individus, mais aussi des individus particuliers, utilisent et s'approprient les connaissances mathématiques dans leur pratique de la discipline. Il est aussi essentiel de comprendre comment ils vont donner un sens à tous ces signes et objets tangibles. Cela implique un deuxième niveau de l'ETM centré sur le sujet vu comme un sujet cognitif. Cette ouverture sur le champ cognitif doit se faire en étroite relation avec les composantes du niveau épistémologique et, pour rester dans un cadre didactique, il est possible d'adapter l'approche sémiotique de Duval (1995, 2005). Pour l'activité géométrique, ces processus sont :

– un processus de visualisation relatif à la représentation de l'espace et au support matériel ;
– un processus de construction, fonction des instruments utilisés (règles, compas, etc.) et des configurations géométriques en jeu ;
– un processus discursif, qui produit des argumentations et des preuves.

Le processus de visualisation nécessite d'être précisé pour trouver sa place dans une extension aux ETM. Il doit être associé à des schèmes et des opérations d'usage des signes dont rien ne prouve a priori qu'ils relèvent tous de la visualisation en tant que telle, même dans une conception étendue de celle-ci (Fig.2).

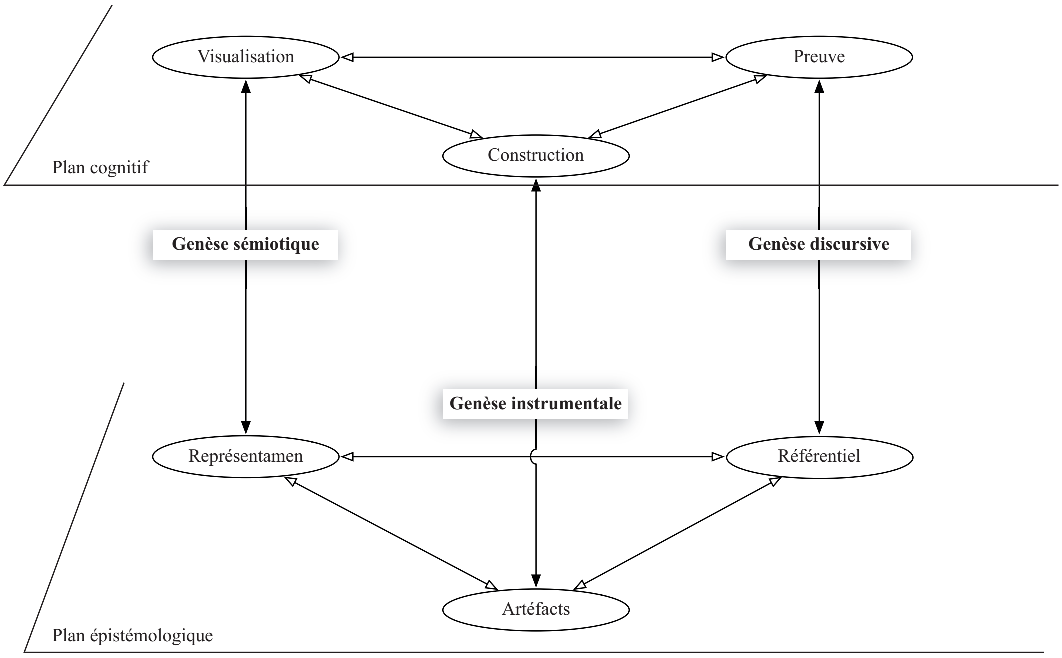

Figure 2 - L'espace de travail mathématique et ses genèses

Ce processus de visualisation « étendue » doit bien être distingué de la simple vision ou perception des objets, il peut être envisagé comme le processus de structuration des informations apportées par les diagrammes et les signes. Il nourrit l'intuition des propriétés et il contribue parfois à fonder cognitivement la validité de ces propriétés. Sous certaines conditions, il peut s'apparenter à un raisonnement de type discursivo-graphique (Richard, 2004) et pourra s'exprimer à l'intérieur de registres de représentation sémiotique déterminés.

3. Les ETM de référence, idoines et personnels

Dans le cadre théorique des ETM tout comme dans celui des ETG, la notion de paradigme oriente et structure l'organisation des composantes qui, par leurs fonctions différentes, participent à la spécificité des divers paradigmes en jeu. Un paradigme s'institue quand une communauté d'individus s'accorde pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines formes de pensée. L'espace de travail « paradigmatique » tel qu'il est alors défini par cette communauté sera appelé *ETM de référence*. Dans une institution scolaire donnée, la résolution d'un problème suppose qu'un *ETM idoine* a pu être organisé pour permettre à un élève de s'engager dans la résolution du problème. Cet ETM idoine doit nécessairement remplir deux conditions : d'une part permettre de travailler dans le paradigme correspondant à la problématique visée, d'autre part être « bien construit », dans le sens où ses différentes composantes sont organisées de manière valide. Son concepteur joue ici un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour des utilisateurs potentiels. En classe, la conception de cet espace va dépendre de *l'ETM personnel* du professeur. Lorsque le problème est proposé à un élève, son traitement mathématique par l'élève va être conduit dans l'*ETM personnel* de cet élève. De ce fait, l'*ETM idoine* n'est pas figé et il doit sans cesse être modifié pour s'ajuster aux contraintes locales.

Ainsi, le travail mathématique dans un cadre scolaire pourra être décrit grâce à trois niveaux d'ETM : la mathématique visée par l'institution est décrite dans l'ETM de référence. Celui-ci doit être aménagé par le professeur en ETM idoine pour permettre une mise en place effective dans les classes, où chaque élève travaillera dans son ETM personnel.

Le choix et l'organisation des tâches données aux élèves par leur professeur sont essentiels dans la constitution de l'ETM idoine, afin qu'il donne la possibilité aux élèves de résoudre de manière adéquate les questions proposées, c'est-à-dire de manière conforme aux attentes institutionnelles décrites de façon plus ou moins explicite dans l'ETM de référence. Ces choix et la gestion des activités vont dépendre en grande partie de l'ETM personnel du professeur. L'observation de l'activité des élèves permettra d'identifier leurs ETM personnels en y repérant d'éventuels sous-ensembles de pratiques stables.

4. Les genèses à l'œuvre dans les ETM

Le développement par un individu de son travail mathématique s'opère graduellement et passe par la mise en place progressive de son ETM personnel. Cette genèse globale de l'ETM suppose un ensemble de genèses qui sont interdépendantes et qui concernent toutes les composantes épistémologiques et les processus cognitifs. L'activation et le contrôle de ces genèses peuvent être initiés par les enseignants (au niveau de l'ETM idoine). Il importe de savoir dans quelle mesure, elles sont conformes, en amont, aux attentes définies dans l'ETM de référence (Kuzniak et Rauscher, 2011 ; Kuzniak, 2013).
Comme nous l'avons vu, les plans épistémologique et cognitif structurent les ETM en deux niveaux et ils aident à comprendre la circulation des connaissances au sein du travail mathématique. Comment dès lors articuler de façon opératoire les niveaux épistémologiques et cognitifs afin de rendre possible le travail mathématique attendu ? Il nous apparaît convenable de s'appuyer sur les trois genèses fondamentales issues du cadre théorique développé plus haut.

- Une genèse instrumentale qui permet de rendre opératoire les artéfacts dans le processus constructif qui contribue à l'accomplissement du travail mathématique ;
- une genèse sémiotique basée notamment sur les registres de représentation sémiotique, qui donne un sens aux objets de l'ETM et leur confère leur statut d'objets mathématiques opératoires ; cette genèse sémiotique assure ainsi la mise en relation entre syntaxe, sémantique, fonction et structure des signes véhiculés ;
- une genèse discursive de la preuve qui utilise les propriétés réunies dans le référentiel théorique pour les mettre au service du raisonnement mathématique et d'une validation non exclusivement iconique, graphique ou instrumentée.

Afin de définir le travail géométrique dans le cadre des ETG, Coutat et Richard (2011) décrivent les interactions spécifiques à la démarche géométrique (voir Fig. 4) en caractérisant les trois plans verticaux qui apparaissent naturellement dans le diagramme des ETG. Dans notre effort de construction théorique des ETM généralisant les acquis de la recherche sur les ETG, les plans verticaux ainsi introduits vont pouvoir être reliés aux différentes phases du travail mathématique mis en œuvre dans l'exécution d'une tâche : découverte et exploration, justification et raisonnement, présentation et communication. La réalisation effective de ces phases définira, de fait, un certain nombre de compétences mathématiques cognitives fondées sur la coordination des genèses dans leurs relations avec le plan épistémologique (Fig. 3).

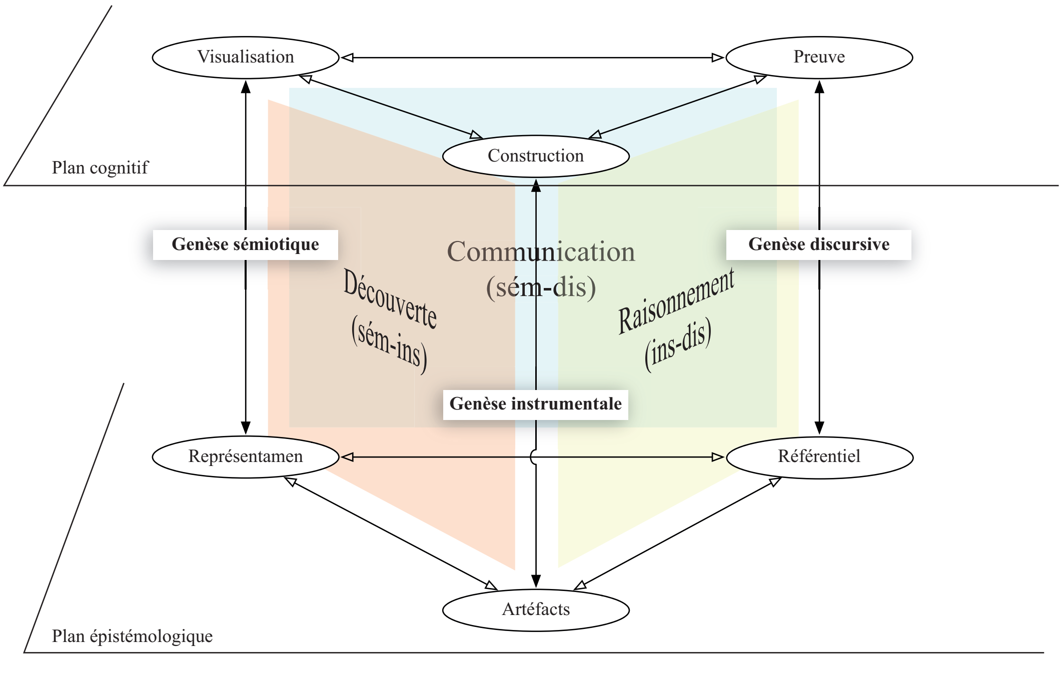

Figure 3 – Les plans verticaux dans l'ETM

Un premier type d'interactions (Sem-Ins) privilégie l'identification et l'exploration des objets en s'appuyant sur les genèses sémiotique et instrumentale pour développer une compétence liée à la découverte de la solution de problèmes mathématiques. Un second type d'interactions (Ins-Dis) développe le raisonnement mathématique fondé sur la justification des découvertes en articulant les genèses instrumentale et discursive. Enfin, un dernier type (Sem-Dis) est orienté vers la communication mathématique des résultats et il s'appuiera essentiellement sur les genèses sémiotique et discursive. La définition exacte de ces plans d'interactions et la description de leurs interrelations dépend du domaine mathématique spécifique étudié.

5. Sur les thèmes de ce numéro spécial

Le travail mathématique fédère l'ensemble des contributions à ce numéro et il constitue le cœur scientifique autour duquel s'est constituée la cohésion de la communauté scientifique lors des symposiums. Sans se restreindre à l'élaboration d'un Espace de Travail Mathématique dans son sens technique, l'objet des communications retenues pour le numéro spécial vise plus largement à s'interroger sur les dimensions sémiotiques, cognitives et instrumentales du travail mathématique en n'excluant a priori aucune approche épistémologique ou didactique. Cet élargissement de la problématique à tout le travail mathématique sous ses différentes formes avait été soumis à la sagacité des contributeurs à partir de quatre thèmes de réflexion que l'on retrouve dans le présent numéro.

Thème 1 – Le travail mathématique et les ETM

L'objet de ce thème est, d'une part, d'approfondir le modèle théorique défini par les espaces de travail mathématique et, d'autre part, d'en explorer les utilisations comme outil d'analyse dans des études particulières. Utiliser ce modèle dans d'autres domaines que celui de la géométrie suppose une étude particulière et ciblée des domaines en question et amène à penser des ETM qui, comme en géométrie, peuvent s'appliquer à l'algèbre, à l'analyse, à l'arithmétique… Pour harmoniser les notations, ces espaces de travail spécifiques, associés à des domaines *d* particuliers, seront notés ETM_d, c'est-à-dire des $ETM_{\text{algèbre}}$, ETM_{analyse}, $ETM_{\text{arithmétique}}$, … L'espace de travail mathématique peut être vu comme une mise en réseau des diverses fibres que constituent les ETM_d. La question se pose alors de savoir comment s'organisent la fibration entre espaces ou le feuilletage des plans. Ces interactions entre les domaines sont essentielles pour comprendre le fonctionnement global du travail mathématique et elles forcent en outre la considération des processus de modélisation dans le cadre des ETM, au-delà des seules questions sémiotiques.

Thème 2 – Environnements technologiques et travail mathématique

Ce thème s'intéresse spécifiquement à l'utilisation d'environnements technologiques, non pour eux-mêmes, mais pour préciser dans quelle mesure ils affectent le travail mathématique. De fait, l'apparition contemporaine de nombreux instruments a contribué à donner un relief nouveau aux aspects constructifs et aux artéfacts qui soutiennent l'exécution du travail mathématique, tant au niveau attendu des élèves qu'au niveau de la recherche actuelle. On pourra retenir une double interrogation relativement à leur impact.

– En premier lieu, quelles potentialités offrent de tels environnements pour transformer le travail mathématique de l'élève ? Du fait de la prise en compte de diverses genèses, il reste avantageux de dépasser la seule approche instrumentale pour répondre à cette question.

– La seconde interrogation consiste à étudier en quoi l'utilisation d'environnements technologiques influence la construction épistémologique de l'élève, guidant son travail mathématique. Cela peut concerner, à titre indicatif, aussi bien la nature des objets mathématiques qu'il construit que les preuves mathématiquement acceptables, de même que son rôle en tant que moyen d'investigation.

Pour exprimer cette interrogation dans le cadre particulier de la géométrie dans des environnements technologique, Coutat et Richard (2011) ont proposé de caractériser les plans verticaux de l'ETG idoine en s'appuyant sur l'idée de démarches : validation, modélisation et découverte (Fig. 4). Au regard de la structuration de l'ETM proposé plus haut (Fig. 3), ces démarches constituent les manifestations des compétences mathématiques du sujet lors de son travail géométrique.

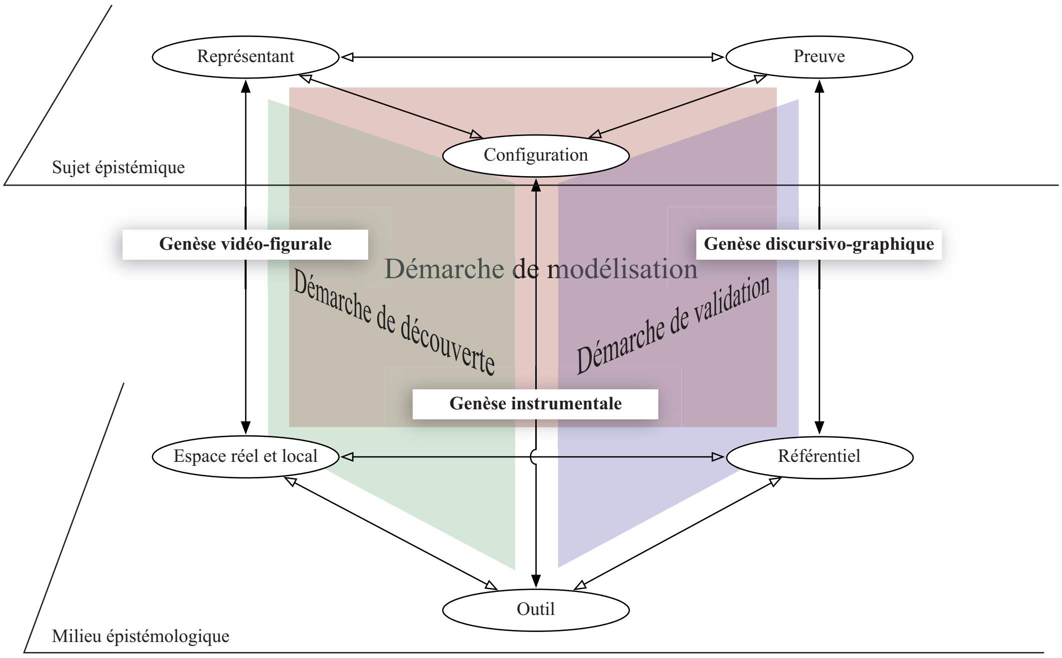

Figure 4 – Les plans verticaux dans l'ETG idoine

Thème 3 – Le travail mathématique et les aspects sociaux et institutionnels

De manière intrinsèque, la question des contextes est centrale dans la constitution du travail mathématique. Il peut s'agir d'une approche interne pour caractériser deux facettes du travail de recherche du mathématicien avec les contextes de découverte et de justification. Aux contextes précédents, on peut ajouter le contexte d'usage des mathématiques qui, souvent, est le contexte principal pour les élèves et les utilisateurs usuels des mathématiques, qui s'intéressent généralement à celles-ci pour la puissance de ses applications. Il est également possible d'élargir le regard sur le travail mathématique en observant le rôle des institutions particulières dans lesquelles ce travail s'insère, conjointement au jeu des interactions sociales et langagières. Le rôle de formation, initiale ou continue, des enseignants en mathématiques apparaît ici comme un levier institutionnel fondamental.

Thème 4 – Visualisation et représentation dans le travail mathématique

Du fait de la variété des représentations graphiques utilisées dans tous les domaines mathématiques, la question de la visualisation et de son rôle global dans le travail mathématique se pose inévitablement. Si la visualisation a fait l'objet de nombreux travaux en géométrie, beaucoup moins de recherches concernent la visualisation dans d'autres domaines mathématiques, encore que plusieurs publications contemporaines en soulignent l'importance (Guzmán, 1996 ; Alsina et Nelsen, 2006). Ce thème s'intéresse aux notions de flexibilité, à la genèse des registres de représentation sémiotique et plus généralement, à la place de ces registres dans le travail mathématique, traditionnel ou instrumenté.

REFERENCES

Alsina, C. & Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. The Mathematical Association of America.

Coutat, S., Laborde, C. et Richard, P.R. (2013). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics* (18 p).

Coutat, S & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 97-126.

Duval, R. (1995). Why to teach geometry. *Icmi Studies on Geometry* Catania.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, 10,* 5-54.

Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos Básicos del Análisis*. Ediciones Pirámide.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education, vol 6.2. pp 167-188.*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24. El espacio de trabajo matemático y sus génesis, traducción J. Lezama, Cicata.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2011). How do Teachers' Approaches on Geometrical Work relate to Geometry Students Learning Difficulties? *Educational studies in Mathematics.77/1.* 129-147

Kuzniak, A. (2013). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. In

Rezat (ed) Transformation – A fundamental idea of Mathematics Education . Springer.
Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale: Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational studies in Mathematics, 57(2),* 229-263.
Thurston W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society. 30(2)*. 161-177.