Table des matières

Chapitre 1

A l'ombre des grandes études comparatives internationales

L'étude Ecos-Conicyt sur la comparaison de l'enseignement de la géométrie au Chili et en France relève des nombreuse études comparatives qui se développent depuis quelques années à la faveur de la multiplication des échanges entre chercheurs de divers pays. Il s'agit d'une étude de faible ampleur comparée aux grandes études internationales récentes commandées par des institutions inter-étatiques comme l'OCDE. Elle a réuni pendant trois ans des chercheurs de la PUCV de Valparaiso du côté chilien et du côté français, des chercheurs qui en majorité appartiennent à l'équipe Didirem de Paris 7. Tous interviennent dans la formation des professeurs.

Dans un premier temps, nous allons situer ce travail dans le courant comparatiste. Nous insisterons notamment sur le cadre théorique développé dans les études TIMSS puis nous verrons que notre étude centrée sur un thème particulier a nécessité l'emploi d'outils théoriques plus spécifiques et aussi plus étroitement reliés à la didactique des mathématiques que ceux utilisés dans les grandes études internationales.

1.1 Sur deux grandes études internationales récentes : TIMSS et PISA

La mise en place d'institutions internationales se préoccupant de l'enseignement des mathématiques suit d'assez près un mouvement semblable chez les mathématiciens. Ce sont d'ailleurs eux qui créent en 1908 la commission internationale sur l'enseignement des mathématiques (CIEM). Dès sa création, la CIEM a favorisé des études comparatives mais celles-ci apparaissent rétrospectivement comme des études de bonne compagnie avec un enjeu relativement faible. Il s'agissait d'observer ce qui se passait au niveau des programmes dans des pays occidentaux aux économies comparables. Le niveau concerné, l'enseignement secondaire, restait un niveau élitiste ne touchant qu'une infime partie de la population, rappelons que moins de deux mille personnes passaient le bac chaque année en France au début du XX^e siècle.

Aujourd'hui la question de la comparaison se place dans le contexte de la mondialisation et de la massification.

Pour comprendre l'enjeu des études récentes, nous adopterons une attitude pragmatique suggérée par Keitel et Kilpatrick (1999). Ces auteurs posent trois questions qui peuvent permettre de guider l'interprétation des résultats.

Qui dirige l'étude ? Qui la paye ? Qui contrôle la présentation des résultats ?

De ce point de vue les deux grandes études internationales récentes, TIMSS et PISA, apparaissent très différentes.

1.1.1 Les études FIMS, SIMS et TIMSS

Ces sigles recouvrent trois études (First, Second and Third) Internationales sur les Mathématiques. La dernière a intégré l'étude des sciences (ce qui explique les deux S) jusqu'alors disjointe de l'étude sur les mathématiques enseignées.

Ces études ont été lancées dès 1959 par l'IEA, organisme créé pour cette occasion et qui regroupait des Universités, des centres de recherches et aussi des ministères de l'éducation de plus de cinquante pays. Il s'agissait de déterminer les effets de l'enseignement des mathématiques en observant notamment les connaissances mathématiques de populations d'élèves dans différents niveaux du cursus scolaire. Trois niveaux avaient été retenus : les années 3 et 4 de la scolarité (CM1), 7 et 8 (3^{e}) et enfin la fin de la scolarité secondaire (11-12). Les pays engagés dans cette étude ne retenaient que deux populations pour mener leur étude. La France avait choisi de tester les populations 2 et 3. Quant au Chili, il n'avait pu participer qu'au niveau 1.

Notre propos n'est pas de rendre compte des résultats de cette étude largement diffusés (notamment chez Kluwer ou Falmer Press) mais de montrer l'émergence du concept de *mathematical literacy*. Cette notion apparaît notamment dans l'étude TIMSS sur les élèves de la fin de la scolarité secondaire. Les auteurs ont distingué deux sous-populations : la première a suivi un enseignement spécialisé en mathématiques dans des classes scientifiques, la seconde a continué ses études dans des domaines non scientifiques. Deux types de connaissances mathématiques sont alors introduits : les « mathématiques avancées » d'une part et d'autre part la *mathematical literacy*. Les connaissances regroupées sous cette dernière dénomination sont celles communes à tous les élèves ayant suivi une scolarité longue. Les questions portent sur des contenus mathématiques standards dans la scolarité en France et au Chili : nombres entiers, fractions et proportions, géométrie... Les questions du groupe de « mathématiques avancées » portent, en plus, sur l'algèbre, le calcul intégral ou vectoriel.

Depuis ce type d'études continue mais piloté par les Etats-Unis dans le cadre de TIMSS où cette fois le T signifie Trends. La France n'adhère plus au consortium d'études alors que le Chili en fait désormais partie.

1.1.2 PISA et la nouvelle notion de *mathematical literacy*

L'étude PISA lancée en 2000 est pilotée par l'OCDE, Organisation de Coopération et de Développement Économique, qui regroupe 30 pays et dont la vocation première est d'aider à la bonne gouvernance des services publics et des organisations dans les pays démocratiques ayant une économie de marché. L'étude PISA se propose d'évaluer chez les enfants de 15 ans ce que les auteurs de l'étude présentent comme la *mathematical literacy* traduit dans les documents en français sous le terme impropre de « culture mathématique ».

La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi. OCDE 2004 Page 39

En anglais, le mot literacy désigne le fait d'être alphabétisé et ainsi de savoir lire et écrire. Depuis peu est apparu le terme *numeracy* qui renvoie à la capacité de savoir calculer et de comprendre des mathématiques simples. L'idée de mathematical literacy suppose une maîtrise des objets mathématiques simples les plus susceptibles de jouer un rôle dans la vie de tous les jours. Les auteurs évitent le terme de culture qui existe aussi bien sûr en anglais mais qui suppose cette fois un degré de maîtrise du domaine envisagé bien plus élevé et distancié. Dans les documents espagnols, les auteurs parlent de *competencias matemáticas*. Le rapport chilien sur PISA 2000, emploie le terme adéquat d'*alfabetización*. De manière cohérente, l'enquête PISA privilégie, pour l'évaluation de cette « culture mathématique » des élèves, une approche qui place l'usage fonctionnel des savoirs et savoir-faire dans des situations tirées de la vie réelle au cœur de l'apprentissage des mathématiques. Le processus central sur lequel insistent les concepteurs de l'étude est celui de mathématisation : il s'agit, pour eux, d'un processus qui commence par l'organisation du problème à résoudre en fonction de concepts mathématiques, qui se poursuit, après effacement de la réalité, par la résolution grâce à l'usage d'outils mathématiques, et qui se termine par la communication du résultat en retrouvant le sens du problème initial dans la réalité. Comme le but principal de l'évaluation est d'apprécier les capacités des élèves à résoudre des « problèmes réels », les auteurs ont décidé de ne pas retenir le découpage traditionnel des mathématiques en arithmétique, algèbre, géométrie etc. En effet, selon eux, ce découpage ne se retrouve pas tel quel dans les problèmes issus de la vie réelle. Pour faire l'évaluation, ils ont ainsi déterminé quatre domaines : Espace et formes, Variations et relations, Quantité et enfin Incertitude. Les résultats sont donnés pour chacun des domaines afin de tenir compte des priorités des différents pays.

1.1.3 Quelques résultats quantitatifs sur la place du Chili et de la France dans ces deux études

Comme nous l'avons vu, il n'est pas toujours facile d'utiliser les résultats des études internationales pour situer le Chili et la France : les deux pays semblant jouer un jeu de cache cache. La seule étude commune est l'étude Pisa de 2000. Dans cette étude la France obtient la note moyenne de 517. Alors que le Chili qui ne fait pas partie de l'OCDE obtient la note de 384 (comparable à l'Argentine 388). Le point le plus intéressant de cette étude qui vise à mesurer le niveau d'alphabétisation en mathématique concerne la répartition des élèves telle qu'elle apparaît dans le tableau suivant qui indique la note maximale obtenue pour un pourcentage donné de la population :

Résultats Pisa 2000

	Moyenne	5%	25%	75%	95%
France	517	364	457	581	651
Chili	384	222	321	449	532

La différence est assez spectaculaire qui montre que 75 % des élèves chiliens obtiennent moins de 449 ce qui est une note inférieure à celle (457) qui majore les résultats des 25 % élèves les plus faibles en France.

Un autre point vient renforcer cette image fort contrastée des deux pays, il s'agit du niveau global des enseignants en mathématiques car au niveau de la Básica 8 (quinze ans), seule une moitié des enseignants a fait des études de mathématiques. Les professeurs sont polyvalents et une partie d'entre eux a suivi des études de pédagogie à l'Université alors qu'en France, les enseignants pour ce niveau ont tous au moins une licence de mathématiques.

1.2 Un cadre théorique pour la comparaison

Les deux exemples précédents attirent l'attention sur l'importance de la finalité de l'étude pour pouvoir l'interpréter. Cette finalité permet notamment de définir un cadre théorique ou d'en retenir un quand l'enquête s'appuie sur les travaux antérieurs des concepteurs de l'étude. Ainsi le support théorique principal de l'étude PISA a été développé par Niss (2003) (voir aussi la présentation critique de Winslow (2005)) et repose sur une conception de l'enseignement basé sur les compétences.

Les études de type TIMSS ne s'intéressent qu'à l'enseignement scientifique mais elles possédent une ambition plus large et visent à décrire tout le système d'enseignement en prenant en compte toute sa diversité. Ainsi les concepteurs de ces études ont-ils été conduits à élaborer un cadre théorique suffisamment étendu pour permettre une grande diversité d'approches.

Le point faible de ces grandes études est certainement la réflexion didactique sur les contenus mathématiques spécifiques. Souvent, comme dans l'étude PISA, les contenus disciplinaires sont en quelques sortes évacués a priori au profit des compétences générales. Ainsi se trouvent placées au cœur du dispositif d'évaluation des notions comme le *problem solving* ou la *mathematical literacy*. Dans la suite de cet ouvrage (Chapitre 2), nous présenterons en détail le cadre théorique que nous avons utilisé pour étudier le cas particulier de l'enseignement de la Géométrie en conciliant à la fois compétences spécifiques et diversité d'approches grâce à la notion de paradigme géométrique.

1.2.1 Le cadre théorique général des études de type TIMSS

Dès la première étude internationale (FIMS), les auteurs ont pris conscience de la nécessité de disposer d'un cadre théorique suffisamment ouvert pour rendre compte des différents systèmes éducatifs étudiés sans privilégier a priori une vision plutôt qu'une autre.

Ils ont donc par la suite situé leur réflexion dans une *approche systémique* du processus éducatif en distinguant différents niveaux de programmes (Curriculum) liés au système éducatif, à la classe et à l'étudiant.

The intended Curriculum : le programme visé

Dans l'étude TIMSS, le curriculum visé doit regrouper les concepts, les connaissances et les compétences visés par l'enseignement des mathématiques. Il se propose ainsi de définir les voies et les buts propres à chaque pays pour enseigner les mathématiques. Les supports nécessaires à cette étude sont les documents officiels produits par les autorités qui pilotent le système éducatif. L'examen des budgets et des textes de lois est également un point intéressant pour repérer les priorités de chaque état.

The implemented curriculum : le programme mis en œuvre

Évidemment, les études sérieuses doivent envisager la mise en œuvre réelle du programme visé et tenter d'apprécier les différences. L'étude TIMSS essaie ainsi de mieux cerner la réalité des classes (effectifs, problèmes sociaux...) et aussi des enseignants (formation réelle et expérience, conception de l'enseignement...).

The attained curriculum : le programme atteint.

La dernière étape de l'approche de la réalité d'un système éducatif passe nécessairement par l'évaluation individuelle des élèves. Mais pour les auteurs, il ne s'agit pas simplement d'évaluer des connaissances mais aussi de mieux connaître les méthodes de travail et les ambitions des élèves.

Ces programmes sont étudiés dans le modèle développé lors de l'étude TIMSS grâce à quatre grandes questions de recherches.

– Que doivent apprendre les élèves ?
– Qui donne l'enseignement ?
– Comment l'enseignement est-il organisé ?
– Qu'ont fait et appris les élèves ?

Cette conception aboutit à un modèle SMSO (Survey of Mathematics and Science Opportunities) utilisé dans la recherche TIMSS dont on voit l'ambition à saisir les systèmes éducatifs dans toute leur complexité.

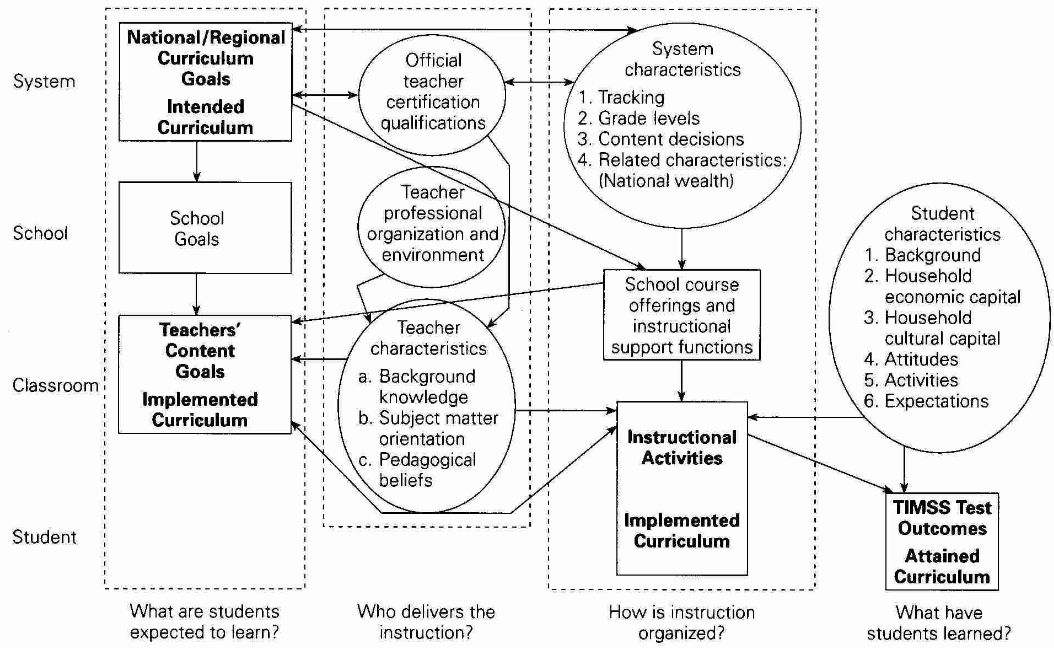
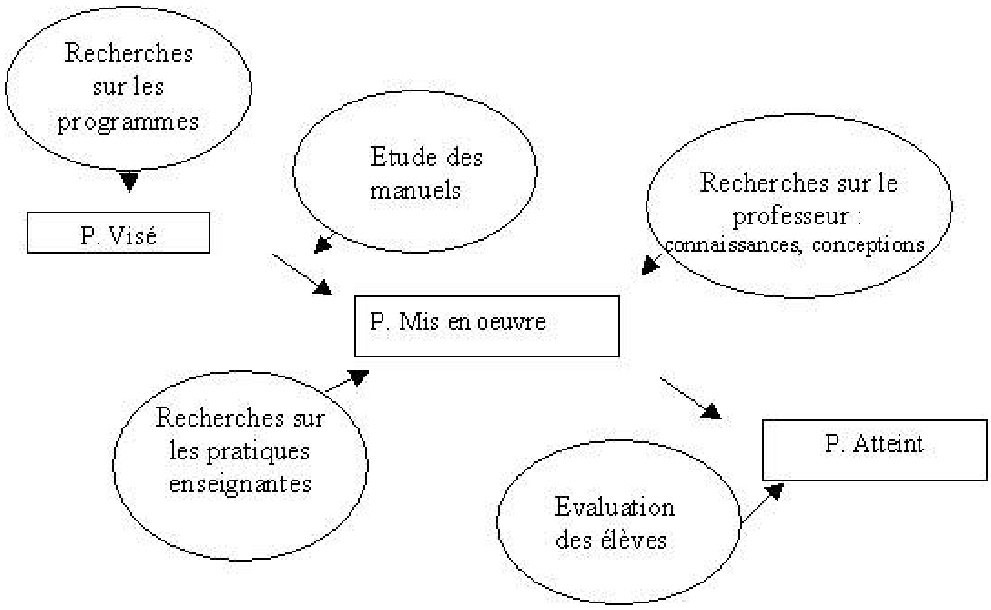


Figure 5.1: SMSO conceptual model of educational opportunity

Fig. 1.1 – Résumé de l'approche SMSO

En s'appuyant au moins partiellement sur ce modèle, il est possible de comprendre les nombreuses possibilités de recherche qui ont pu s'appuyer sur ce cadre et dont le schéma suivant illustre quelques-unes unes des directions suivies.



Quelles questions avons-nous étudiées ? Avant de répondre, nous allons présenter le domaine mathématique que nous avons retenu pour notre étude.

1.2.2 Le cas particulier de l'enseignement de la géométrie

Le thème général de l'étude s'insère dans la question de la comparaison de l'enseignement des mathématiques au Chili et en France avec l'ambition d'atteindre à terme une comparaison des systèmes de formation des enseignants. Pour diverses raisons, nous avons choisi de restreindre l'étude à l'enseignement de la géométrie.

- En premier lieu, la géométrie est un thème présent à tous les niveaux de l'enseignement obligatoire dans les deux pays ;
- En second lieu, c'est un domaine fondamental (au sens propre de fondement, fondation) pour les mathématiques mais aussi pour l'utilisation des mathématiques dans la vie pratique et dans les autres sciences ;
- De plus, la géométrie permet, même au niveau scolaire, une gamme extrêmement étendue d'activités, depuis le dessin aux instruments et la construction de solides jusqu'à la démonstration formalisée, en passant notamment par le calcul numérique ou algébrique, la modélisation et le traitement de situations concrètes, la résolution de problèmes mathématiques non algorithmiques. Autrement dit, la géométrie permet a priori de faire pratiquer aux élèves toutes les dimensions de l'activité mathématique comprise dans son sens le plus large.
- Enfin, c'est un domaine qui a donné lieu ou donne lieu à des modes d'enseignement très différents, depuis un enseignement axiomatique jusqu'à un enseignement d'inspiration constructiviste, s'appuyant fortement sur la résolution de problèmes pour obtenir les apprentissages et la construction du sens. Dans ce dernier cas, le terrain d'investigation que constituent les dessins et les corps géométriques constitue un environnement particulièrement favorable aux explorations des élèves confrontés à un problème géométrique.

Nous faisons donc l'hypothèse que, dans cette diversité d'approches, les choix opérés pour l'enseignement de la géométrie sont représentatifs de la conception des mathématiques ainsi que de la conception de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques en vigueur dans chaque pays.

1.2.3 Les questions abordées dans cette étude

Nous avons suivi une approche systémique et nous avons procédé par zooms successifs en focalisant la recherche sur des points de plus en plus précis. Nous insistons ici sur l'articulation de notre approche avec celle de TIMSS pour en permettre une interprétation plus facile mais de fait, initialement, nous avons conduit notre étude sans nous référer à ce modèle.

Le premier niveau porte sur la nature du programme attendu et il s'appuie essentiellement sur les textes officiels nationaux (Instructions Officielles définissant les programmes et Brochures d'accompagnement en France, textes du Ministère de l'Education Chilien) qui définissent les attentes institutionnelles dans la scolarité (enseignement primaire et secondaire en France, Básica y Media au Chili).

Grâce à une étude comparative exhaustive de la liste des contenus obligatoires, nous avons pu nous intéresser aux concepts et théorèmes enseignés (Savoir savant), aux procédures de construction aux instruments, aux éléments concernant les formes de raisonnement en mathématique et enfin aux savoirs de nature culturelle ou historique.

Puis en nous référant aux travaux de C.Houdement et A.Kuzniak sur les paradigmes géométriques, nous avons analysé la conception de la géométrie en vigueur aux différents niveaux de la scolarité. Le but est ici de suivre tout au long de la scolarité, l'évolution de l'espace du travail géométrique proposé aux élèves dans les deux pays. Sur quels objets travaille-t-on ? Comment valide-t-on les résultats ? Quels instruments utilise-t-on ?

Pour avancer dans l'étude du programme mis en oeuvre, un autre niveau d'étude prend en compte les textes officiels évoqués précédemment, notamment les documents d'accompagnement. Il s'agit de s'intéresser de plus près au travail géométrique proposé dans les deux pays pour l'ensemble de la scolarité.

Le troisième niveau d'étude ajoute une dimension en s'intéressant également aux manuels, dimension nécessaire pour obtenir une vision plus fine de ce qui s'enseigne. Rappelons qu'au Chili, les manuels scolaires achetés dans les écoles publiques doivent bénéficier de l'accord d'une commission qui effectue un choix et donne la *licitación*. Les écoles privées semblent bénéficier d'une assez grande marge de manœuvre par rapport au choix des manuels. En France, les éditeurs sont les maîtres du jeu, le choix du manuel est laissé à l'équipe enseignante de chaque établissement.

Cette partie du travail est centrée sur l'étude de trois thèmes géométriques communs aux deux pays : Théorème de Pythagore, Périmètre et aire du disque, Figures de même forme. Ces sujets qui au Chili sont abordés respectivement pour les deux premiers en septième et huitième année de l'enseignement basique et pour le dernier en deuxième année de l'enseignement moyen, nous conduisent en France à parcourir les différents niveaux de l'enseignement secondaire, voire pour le second thème du cycle 3 de l'école primaire. Ces études thématiques confirment et illustrent des différences dans les choix des deux pays, repérables au niveau des textes officiels mais de manière souvent allusive. Elles montrent l'intérêt d'une approche didactique centrée sur des contenus spécifiques.

Pour mieux appréhender la question de la mise en œuvre, une dernière étude vise à réunir des éléments sur la relation qu'entretiennent avec la géométrie les étudiants qui se destinent à l'enseignement. Cette dimension est considérée comme un indicateur des effets des deux systèmes d'enseignement en même temps qu'elle est une entrée dans l'étude des systèmes de formation des enseignants. Cette partie du travail repose sur des questionnaires mis au point par des membres de l'équipe et déjà utilisés du côté français, à l'Iufm d'Alsace.

L'étude de séances d'enseignement dans les classes n'a été que partiellement réalisée, nous donnerons quelques éléments sur ce point qui fait l'objet de la thèse d'Andrea Pizzaro.

Enfin, nous avons laisse de côté la question de l'étude des connaissances des élèves qui avait largement été couverte par les des études de grande ampleur au niveau international mais aussi national (Simse au Chili, Evaluations nationales en France).

Nous espérons que notre étude des autres composantes du système scolaire donne ainsi un accès différent et une compréhension autre des résultats des élèves.

Chapitre 2

Paradigmes et espaces de travail géométriques

Un cadre pour l'analyse comparée de l'enseignement de la géométrie au Chili et en France

Le cadre théorique spéficique à la géométrie que nous avons utilisé dans ce travail de comparaison s'appuie sur les notions de paradigmes et d'espace de travail géométriques. Il a été développé en s'appuyant en partie sur les travaux de Gonseth (1945-1955) et aussi sur ceux de Kuhn à qui nous avons emprunté la notion de paradigme. Selon Kuhn (1962/1970), un paradigme est composé d'une théorie qui guide l'observation, de méthodes et de critères de jugement qui permettent la production de nouvelles connaissances. Un paradigme est ainsi lié à une communauté : le travail du scientifique est guidé par le paradigme dans lequel il travaille, le paradigme est « ce que partagent ses membres [un groupe particulier de spécialistes] qui explique la relative plénitude des communications sur le plan professionnel et la relative unanimité des jugements professionnels »(Kuhn 1970, p 248). D'après Chalmers, la notion même de paradigme est pour Kuhn constitutive de la science : « la science doit contenir en elle un moyen de rompre avec un paradigme pour passer à un autre, meilleur que le premier »(Chalmers 1982 p. 164), mais simultanément l'abandon d'un paradigme au profit d'un autre ne peut se faire de façon logique : les paradigmes sont incommensurables.

Dans sa postface de 1969, Kuhn enrichit cette notion de paradigmes en y intégrant l'idée de problèmes (Kuhn 1970 p. 255) : la compréhension d'un paradigme et de ses lois par un étudiant ne peut se réaliser qu'à travers la résolution de problèmes normaux où celui-ci va construire des analogies, va acquérir « une manière de voir autorisée par le groupe et éprouvée par le temps » (Kuhn 1970 p. 258)

Revenons sur la géométrie élémentaire. Nous l'envisageons composée de trois paradigmes : la Géométrie Naturelle (ou Géométrie I), la Géométrie Axiomatique Naturelle (ou Géométrie II), la Géométrie Axiomatique Formaliste (ou Géométrie III). Cette terminologie est empruntée à Gonseth, mais plus que les termes utilisés, ce qui importe ici c'est notre conception de la géométrie élémentaire éclatée en trois paradigmes que nous désignerons le plus souvent par leur numéro.

Nous allons préciser les objets, les méthodes et les problèmes qui définissent chacun de ces paradigmes.

2.1 Les paradigmes géométriques

2.1.1 La Géométrie I

Les objets de la Géométrie I sont des objets matériels, traces graphiques sur le papier ou traces virtuelles sur l'écran d'ordinateur, ou encore maquettes d'objets de l'environnement. Ce sont des épures au sens que lui donne Chevallard (1991).

Dans les pratiques usuelles, ce sont souvent des objets du micro-espace (Berthelot, Salin 2000) sensés représenter, dans un espace petit et propice à des contrôles, des objets réels plus grands ou plus complexes. Ils sont donc le fruit d'une première modélisation même des plus élémentaires : le trait tracé à la règle refuse les aspérités, le cercle tracé au compas est le produit d'une activité instrumentée représentant le « rond ». Ce sont des productions commodes notamment pour la reproduction et la description : le cercle est ainsi plus commode que l'ellipse, pourtant souvent meilleure image du « rond ». C'est dans ce sens qu'il faut comprendre le qualificatif de Naturelle.

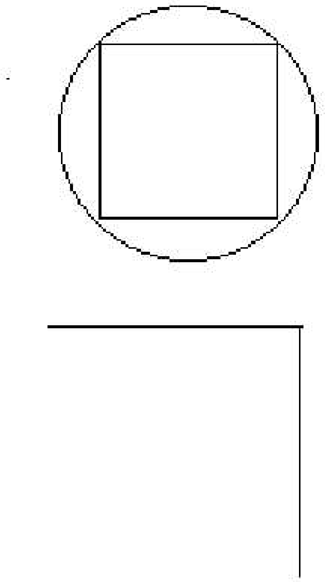
« Les figures sont ce que l'abstraction nous montre dans les corps naturels, quand nous les étudions au point de vue au point de vue purement géométrique » Charles Méray (1906 p.2). L'esprit et le raisonnement ne sont pas absents de cette Géométrie I, même si les objets sont matériels et proches de la réalité.

Les objets ne sont plus aussi uniques que leurs traces matérielles : ils sont déjà le fruit d'une première classification, par le choix des mots (comme dans tout processus de nominalisation) : quadrilatères, carrés, rectangles... Ce sont déjà pour certains en partie des objets mentaux : un trait droit sur le papier, s'il est nommé droite, doit être pensé comme un rectiligne droit illimité, infini...

Pour les problèmes de cette Géométrie, il est normal (au sens de problèmes normaux de Kuhn) de s'intéresser à un moment donné à des traces spatio-graphiques ou des maquettes, soit qu'elles sont données comme point de départ, soit que le résolveur est conduit ou prend la décision de les construire. Les techniques s'appuient sur l'utilisation des instruments dits usuels de géométrie (règle graduée ou non, équerre, compas, rapporteur), mais aussi sur le pliage, le découpage, le calque... Les tâches peuvent être précisées par le choix des instruments autorisés : c'est ainsi que le mesurage est une technique licite et courante en Géométrie I, mais il existe aussi des problèmes résolubles dans Géométrie I sans mesurage (Duval 2005). L'expérience usuelle dans ce paradigme est le dessin instrumenté.

Les modes d'accès aux connaissances font appel à l'intuition, comme la reconnaissance perceptive de certains dessins, *c'est un carré je le vois*, à l'expérience, notamment liée à des instruments, *c'est un carré, il a 4 angles droits constatés avec l'équerre et 4 côtés de même longueur, vérifiés avec la règle graduée ou le compas ou ...*), mais aussi au raisonnement : notamment dans la faculté de mobiliser des connaissances non convoquées pour en déduire des nouvelles. La validation reste empirique, par confrontation à la réalité et par jugement de cette adéquation.

Il serait faux croire que cette géométrie est vide de raisonnements. Par exemple dans la reproduction de dessins ci-contre, l'élève qui réussit a sans doute testé l'hypothèse (et validé) du centre du cercle comme point de rencontre des diagonales du carré (ou convoqué cette connaissance).

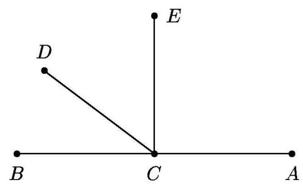


Voici une figure composée d'un carré et d'un cercle.
Vous devez la reproduire, la figure est déjà commencée : deux côtés du carré sont déjà tracés.
Exercice extrait d'Évaluations nationales de 6^e.
Résultats corrects (1997).
Pour le carré : 94,3%
Pour le cercle : 63,6%

FIG. 2.1 – Evaluation sixième

Les raisonnements dynamiques, voire mécaniques sont autorisés comme dans cette démonstration extraite des Éléments de Géométrie proposée par Briot alors Maître de Conférence à l'École Normale Supérieure.

Théorème 1. Par un point C pris sur une droite AB, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.



Imaginons que la droite CD , coïncidant d'abord avec CA, tourne dans le plan autour du point C ; l'angle ACD ira en augmentant d'une manière continue, tandis que l'angle DCB ira en diminuant ; mais le premier angle, d'abord plus petit que le second, finit par devenir grand ; donc il y a une position CE de la droite pour laquelle les deux angles adjacents sont égaux, et il n'y en a qu'une. Dans cette position, la droite CE est perpendiculaire à AB. Ainsi, par le point C on peut élever une perpendiculaire CE à la droite AB, et on n'en peut en élever qu'une.

FIG. 2.2 – Eléments de Géométrie (Briot 1863 p. 4)

2.1.2 La Géométrie II

La Géométrie II prend pour objets d'étude des objets idéels. D'où la nécessité de définitions, d'axiomes, comme chez Euclide « Le point est ce qui n'a aucune partie. Les extrémités d'une ligne sont des points. ». Les axiomes proposés dans le Géométrie euclidienne, prototype de la Géométrie II sont fortement appuyés sur les objets de la Géométrie I conservant ainsi un lien fort avec l'espace sensible, d'où le qualificatif d'Axiomatique Naturelle.

Le mode de production des connaissances (qui s'appellent dans ce paradigme Théorèmes) est le raisonnement hypothético-déductif, dont la démonstration est emblématique. Les problèmes devraient être tous uniquement textuels puisque les objets de ce paradigme sont les définitions et les théorèmes textuels. Mais ces objets textuels sont conventionnellement, par commodité (voir ci après) représentés par des schémas, à la « texture » identique aux dessins de la Géométrie I, mais sur lesquels le « regard » (la théorie, le paradigme) doit changer : ce qui a été précisé par un certain nombre de chercheurs notamment en dissociant les expressions « dessin » et « figure », en inventant « figural concept » (Fischbein 1993). Il s'agit là en effet d'objets conceptuels au sens de Bunge (1983), qui ne sont définis que par la théorie dans laquelle ils s'insèrent.

Les schémas et plus généralement les images présentent la caractéristique de regrouper en un tout un certain nombre d'hypothèses (que l'expert -le prof- garde bien à l'esprit MAIS que le novice -l'élève- réinvente à partir du dessin, d'où la notion de domaine de réalité et domaine de fonctionnement de Laborde) et de pouvoir déclencher des schèmes d'enchaînements (que l'expert contrôle par la déduction logique mais que le novice contrôle souvent aussi par la réalité). C'est pourquoi les figures tendent à se substituer aux axiomes et théorèmes comme objets d'étude, alors qu'elles n'en constituent qu'une interprétation.

Dans ce paradigme, il n'y a pas d'instrument matériel, mais des instruments intellectuels : seul le raisonnement hypothético-déductif permet de construire de nouvelles connaissances. Pourtant il est d'usage que la règle et le compas, ou même les logiciels dynamiques jouent un rôle particulier dans ce paradigme. Nous expliciterons plus loin pourquoi en introduisant notamment la notion d'espace de travail

2.1.3 La Géométrie III

Nous en dirons peu sur ce paradigme. Ses objets sont aussi idéels, le raisonnement hypothético-déductif le moteur et la source des nouvelles connaissances. Ce qui le différencie de la Géométrie II est le fait que les axiomes de base ont coupé le cordon avec la réalité et que l'axiomatisation vise à être complète, alors qu'en Géométrie II, vivent des îlots déductifs. La Géométrie III a émergé avec la naissance des géométries non euclidiennes. Elle est culturellement peu convoquée dans les savoirs de l'école obligatoire.

2.1.4 Les rapports de GI et GII : hiérarchie ou complémentarité ?

Nous avons donc précisé deux paradigmes de la géométrie élémentaire relativement cohérents quant aux objets d'étude (matériels *versus* conceptuels) ; aux techniques licites (dessins instrumentés *versus* inférence de conjectures et validation par déduction logique) ; aux modes de validation (références au réel *versus* références logiques).

Ces deux paradigmes ne sont pas a priori hiérarchisés dans leur rapport à l'espace : il n'y a pas d'argument logique pour décider a priori le quel serait meilleur pour modéliser l'espace (cf. Kuhn 1970), et ce d'autant avec le développement des logiciels informatiques.

Prenons en particulier l'exemple classique suivant (fig 2.3)

Trouve la hauteur h du poteau en t'appuyant sur la schématisation ci-dessous.

Ce problème au départ n'est pas un problème posé dans le paradigme Géométrie II dans la mesure où un grand nombre d'informations (dont les angles) n'est disponible que sur le dessin.

Il peut être traité en Géométrie I par, par exemple, un dessin à l'échelle 1/100 (donc une conservation « approximative » des angles), un mesurage de h sur le dessin réduit et une mesure de la hauteur du poteau. La hauteur de h est alors estimée entre 10 et 10,3 m.

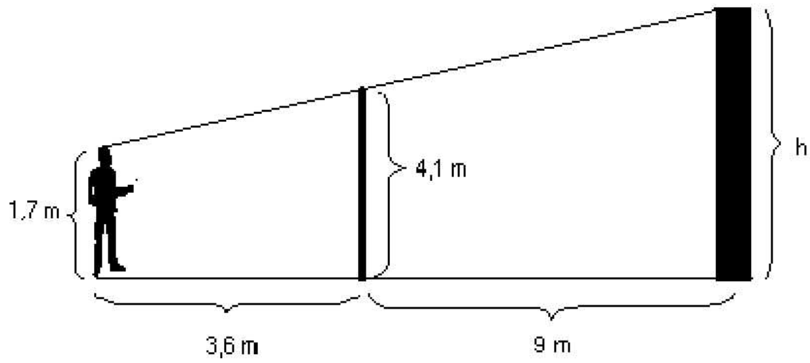


FIG. 2.3 – Hauteur du poteau

$$\frac{2,4}{3,6} = \frac{h - 1,7}{12,6}$$
d'où $h = 10,1$

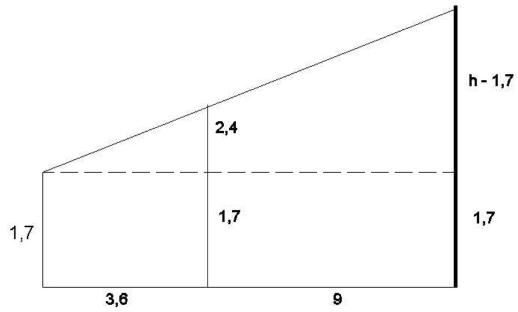


FIG. 2.4 – Hauteur du poteau : diagramme

Il peut aussi être traité en Géométrie II moyennant l'intégration des hypothèses (deux droites coupées par trois droites parallèles, les « verticales ») et par exemple l'utilisation du théorème de Thalès dans un triangle obtenu par l'ajout spontané d'un tracé auxiliaire. Cette construction d'une sous-figure correspond à une technique de Géométrie I, mais à la recherche d'une figure prototypique de Géométrie II. Cette technique de Géométrie I n'est ni évidente, ni spontanée comme l'a précisé notamment Duval (1988, 2005).

Peut-on parler d'une meilleure solution ? Oui s'il y a en jeu une précision : cette précision doit alors être demandée et aussi précisée pour les mesures de départ. Non sinon, dans ce cadre unique.

On peut faire valoir que la résolution en Géométrie II présente une économie de tracé et offre une généralisation plus rapide : c'est vrai (et ce pourrait être un argument pour l'entrée dans la Géométrie II) mais pour un problème local, les deux démarches offrent globalement le même coût (dessin versus Thalès) et nécessitent des raisonnements non triviaux mettant en jeu de la proportionnalité.

Ainsi la Géométrie II produit dans bien des cas une technologie pour des techniques de Géométrie I : les deux tracés usuels de la médiatrice, le partage d'un segment en segments de même longueur, la multiplication et la division géométrique, en général les constructions à la règle et au compas... Mais il existe en Géométrie I des constructions efficaces (pratiquées par les peintres, les professionnels) non validés en Géométrie II, par exemple celles de l'heptagone régulier, de l'ennéagone régulier.

La Géométrie II est même productrice de techniques pour des problèmes spatiaux (Berthelot Salin 2000), mais pas systématiquement : la corde à douze nœuds du maçon égyptien est contrôlée par le Théorème de Pythagore, un des maillons de la Géométrie d'Euclide ; l'archéologue qui veut trouver le diamètre d'une assiette en partie cassée peut avec le morceau d'assiette restant tracer un arc de cercle et construire le centre comme intersection de deux médiatrices de cordes. Mais remarquons que, si l'arc est petit, cette technique n'est pas efficace : mieux vaut disposer d'une planche (d'une affiche) avec différents arcs de cercle (et mesures des rayons) prédéterminés et ordonnés, sur l'un desquels l'archéologue pourra poser le morceau d'assiette et lire le diamètre.

Pour résumer

1. La Géométrie I fournit une heuristique et un « terreau »d'expérimentation pour la Géométrie. La Géométrie II présenterait un caractère généralisateur par rapport à certaines techniques de Géométrie I : un problème résolu en Géométrie II serait susceptible d'automatiser la résolution de problèmes de même type de Géométrie I.
2. La Géométrie II fournit une technologie de certaines techniques de Géométrie I, mais certains problèmes spatiaux (pas du tout modélisés) ne tirent pas bénéfice de connaissances de Géométrie II.

Il se produirait en quelque sorte une co-construction des deux paradigmes l'un par l'autre et l'un sur l'autre, à la façon de la double émergence pointée par Robert et Treiner entre la physique et les mathématiques.

2.2 La notion d'espace de travail géométrique

2.2.1 Vers une définition

Le spécialiste est sans doute conscient de cet aller-retour permanent entre les deux paradigmes lors de la résolution d'un problème géométrique : pour la lecture des hypothèses (notamment des alignements, la convexité), pour le lancement d'une heuristique, et même pour certaines définitions et quelquefois même pour la validation, et ce déjà dans l'histoire.

Par exemple Carrega (1981, p. 5) déclare que chez Euclide « La faiblesse de certaines définitions de base, notamment celle de droite ou d'angle nécessitait au cours de la démonstration le secours d'une figure bien faite ; on peut même dire que la figure faisait partie intégralement de la démonstration qui s'adressait aux yeux autant qu'à la raison »

Cet état de fait se poursuit actuellement dans l'enseignement où aucun glossaire de manuel de collège ne fournit jamais de définition pour droite, ni pour angle. L'hypothèse que nous faisons est que des versions simples de ces définitions sont difficilement réductibles uniquement à du texte, comme l'avait déjà constaté Euclide.

La complémentarité des deux paradigmes et la difficulté à les séparer nous a conduit à concevoir un nouvel objet, celui celle d'espace de travail géométrique.

La notion d'espace est à prendre assez naïvement au sens espace de pensée : s'y insèrent des objets, des outils, et une finalité, un horizon pour le travail géométrique. La finalité est définie par le choix du paradigme géométrique, référentiel théorique.

Le travail consiste en l'établissement d'un rapport entre objets empiriques et théoriques, il ne doit pas nécessairement déboucher sur la production d'objets concrets.

Les objets sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent du modèle théorique qui les définit Dans la vision abstraite de la Géométrie III, l'espace est constitué de points, de droites et

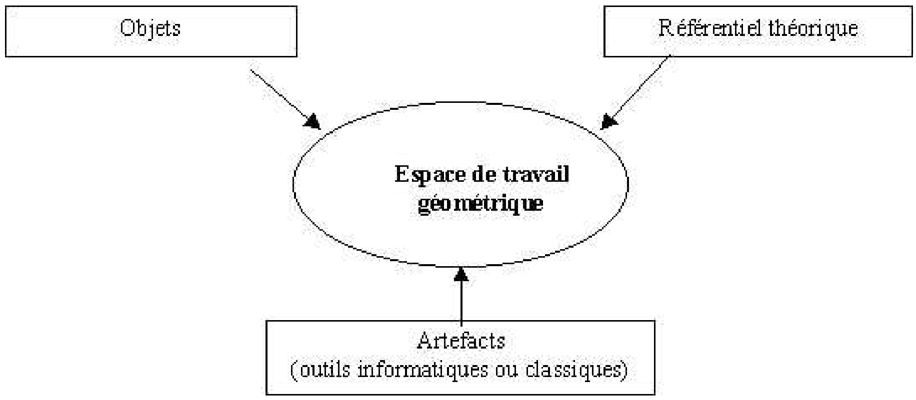


FIG. 2.5 – Espace de travail géométrique

de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Dans la Géométrie Axiomatique Naturelle (Géométrie II), les définitions des points, droites et plans s'appuient sur notre perception de l'espace environnant et nous permettent d'utiliser notre intuition perceptive pour étudier certaines sous-parties de l'espace, les figures ou les configurations. En Géométrie I, les objets d'étude sont les dessins ou de maquettes. Ainsi les apparences peuvent être confondues, seul l'horizon paradigmatique définit le type de travail licite.

Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail : dans la géométrie enseignée , ils constituent pour les élèves la face la plus visible et la plus prégnante.

Rabardel (1995) précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action. L'intérêt de cette approche est d'attirer l'attention sur le processus de genèse instrumentale qui transforme un artefact en instrument avec une double orientation : l'instrumentalisation orientée vers les usages de l'artefact et l'instrumentation tournée vers l'appropriation par le sujet des schèmes d'action. Cette distinction entre instrumentation et instrumentalisation nous semble capitale dans notre approche, comme nous allons le préciser sur la règle et le compas.

La règle et le compas sont deux artefacts privilégiés en Géométrie I, sans doute parce qu'ils évoquent en Géométrie II la question de la constructibilité, au contraire de l'équerre qui ne bénéficie pas d'un tel étayage théorique. Les considérer, à tort, comme des instruments de preuve de la Géométrie II devient un glissement facile. Ce qui peut expliquer que ces instruments perdurent dans les activités géométriques même au lycée, alors que les élèves n'y voient sans doute que des artefacts comme les autres.

Finalement leur intégration dans l'espace de travail dépend du regard théorique que l'expert peut porter sur eux, mais qui reste encore caché au novice.

La règle non graduée est un instrument peu usuel pour construire, mais Duval et Godin (2005) ont revisité son usage pour construire de véritables problèmes en Géométrie I.

2.2.2 Fonctionnement de l'ETG

Cette dynamique de l'espace de travail, un équilibre maîtrisé entre Géométrie I et Géométrie II, est en particulier palpable dans les pratiques géométriques : un travail conséquent en Géométrie I outille le résolveur dans sa capacité à émettre de conjectures, sans être suffisant pour assurer le raisonnement hypothético-déductif. La fonction « drag » des logiciels dynamiques type Cabri décuple cette capacité à émettre des conjectures et suffit, quand le dessin résiste au « dragging », à prouver dans le paradigme de Géométrie I la véracité des conjectures. Simultanément cette approche montre le statut autre qu'a la démonstration : visée de généralisation, d'explication. Elle apporte la certitude que le même phénomène se produit pour un nombre infini de manipulations « identiques » *id est* respectant les hypothèses de départ.

Il est aussi à noter que les pratiques normales des experts (communes à des spécialistes à l'intérieur d'un paradigme) les amènent aussi à prélever sur les dessins un certain nombre d'hypothèses telles que positions relatives, convexité... nécessaires à l'avancée du problème mais non relayées par du texte : car ils savent que sans elles, le problème est difficilement traitable. Mais comment les novices s'emparent ils de cette pratique ? Souvent en l'étendant de façon inappropriée : on pourrait dire que leur ETG n'intègre pas suffisamment la Géométrie II, dans le sens où ils n'ont pas compris la nécessité de minimaliser le recours au dessin comme production d'informations sures.

Ainsi, l'étude de l'ETG passe par l'analyse de l'organisation de ses composantes élaborée pour donner à cet espace une efficacité maximale dans une institution donnée. Mais l'étude doit aussi s'intéresser aux organisations et aux adaptations opérées par les individus qui effectuent un travail de géométrie. Cela conduit à considérer différents types d'ETG que nous décrivons rapidement ci-dessous.

– *ETG de référence.* Cet espace de travail est défini de manière idéale en fonction de seuls critères mathématiques. Son utilisateur est un individu expert *épistémique.* On peut donc également envisager cet espace comme l'ETG de la communauté des mathématiciens, ce qui le pose en référence à tout travail de transposition classique.
– *ETG idoine.* L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. Cela suppose une réflexion sur la réorganisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence. Son utilisateur premier reste un expert, mais il joue un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour ses utilisateurs potentiels futurs. De fait, le choix de l'adjectif idoine suppose que cet espace est bien conçu et opérationnel pour les questions qu'on pose dans cette institution. Nous devrions en toute rigueur introduire d'abord l'idée d'un ETG institutionnel et poser ensuite la question de son caractère idoine.
– *ETG personnel.* L'ETG idoine doit être utilisé par des étudiants mais aussi par leurs enseignants. Chacun se l'approprie et l'occupe avec ses connaissances mathématiques et ses capacités cognitives. Ces ETG sont ce que nous appelons des ETG personnels. Quand l'élève construit son espace de travail, il a tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Il lui accorde ainsi une fonction de validation indépendamment de l'horizon visé. Le rôle de l'enseignant consistera à développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. Cela suppose qu'il ait lui-même une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique et cela nous renvoie à des problèmes de formation d'enseignants.

Dans le tableau suivant, nous présentons une correspondance avec le cadre théorique de TIMSS (voir 1.2.1) :

Programme général	Programme géométrique	Espace de travail géométrique
Intended Curriculum	Géométrie visée	de référence
Implemented Curriculum	Géométrie mise en œuvre	idoine
Attained Curriculum	Géométrie à l' œuvre	personnel

2.2.3 Quelques questions mises à l'étude

En utilisant notre cadre, nous pouvons poser un certain nombre de questions qui permettent d'étudier de manière didactique et relativement neutre idéologiquement l'enseignement de la géométrie.

Quelle est donc la géométrie qui est visée par l'institution scolaire ? S'agit-il de d'une géométrie de type GI, GII ou GIII ? Cette question doit être complétée par une interrogation qui porte sur la nature et la composition de l'ETG mis en place. Quels sont les artefacts utilisés ? Quel référentiel théorique est mis concrètement en œuvre ? Quels types de problèmes sont utilisés et jugés comme significatifs dans cette mise en œuvre pour faire entrer les élèves dans la géométrie attendue ?

Enfin, quelle est l'articulation qui existe entre les diverses géométries de l'école ? Dans ce cas, il est important de savoir si cette articulation repose sur un jeu maîtrisée et assumée entre Géométrie I et II ou si l'on a plutôt affaire à un glissement d'un paradigme à l'autre. Dans ce cas, le professeur pense faire de la Géométrie II alors que les élèves sont en Géométrie I.

Nous nous proposons de répondre à ces questions dans la suite de cet ouvrage en étudiant le cas particulier de l'enseignement de la géométrie dans les deux pays que nous rapprochons ici : le Chili et la France.

Chapitre 3

Programmes et paradigmes géométriques

Évolution de l'Espace de Travail Géométrique au long du cursus

Résumé

Ce chapitre présente une étude longitudinale qui vise à déterminer comment, au fil des années, se situent les programmes par rapport aux paradigmes de la Géométrie I (Géométrie Naturelle) et de la Géométrie II (Géométrie axiomatique naturelle). Nous analysons dans ce but les textes officiels, programmes et documents d'accompagnement, le recours à des manuels n'étant qu'exceptionnel. Il est d'emblée évident que les enseignements français et chilien se différencient nettement, le premier se situant dès les premières années du collège en Géométrie II, au moins pour la géométrie plane, alors que le second laisse droit de cité à la Géométrie I jusqu'à la fin de la scolarité, l'évolution de la place accordée aux deux paradigmes étant très progressive. Cette dissymétrie nous a conduits à ne pas mener l'étude exactement de la même façon pour les deux pays.

Pour la France, nous nous sommes intéressés à la place du dessin dans l'activité géométrique en dimension 2. De cette étude ressort que le lien de l'activité géométrique avec le dessin instrumenté est très fort au Primaire et en Sixième puis s'affaiblit au collège et disparaît totalement au lycée (sauf dans les sections littéraires et artistiques). Située en Géométrie I au Primaire, l'activité mathématique se situe totalement en Géométrie II à partir de la quatrième ; ce changement est amorcé en Cinquième, classe où commence l'apprentissage de la démonstration. En Sixième, la situation est plus ambiguë mais il apparaît que dès cette classe, un dessin n'est plus une source d'informations valides, le mesurage[1] est plus ou moins explicitement interdit comme incapable de fournir des données exactes. Une étude de la situation pour la géométrie dans l'espace montre toutefois que dans ce secteur, le changement de paradigme est beaucoup plus lent, certaines activités relevant de la Géométrie I (tracé de sections de solides) perdurant jusqu'en Première.

Nous nous sommes enfin penchés sur la place accordée par les textes à l'apprentissage de la démonstration formelle : il apparaît clairement que la Géométrie en est le terrain privilégié, c'est une des raisons de la place encore accordée à ce domaine dans l'enseignement français.

[1]Nous désignons par ce terme l'activité de prise de mesure.

Pour le Chili, nous avons tenté d'approcher l'évolution de l'espace de travail en centrant notre étude, pour tous les niveaux de 6B (équivalent de la Sixième) à 4M (équivalent de la Terminale), sur les activités permettant d'introduire des notions ou des résultats nouveaux qui figurent dans les documents d'accompagnement. Nous nous sommes intéressés à la nature des objets en jeu ainsi qu'aux modalités de la validation.

La classe de 6B définit en quelque sorte un état initial d'un espace de travail géométrique qui évolue très progressivement au cours des années ultérieures : les objets étudiés sont soit des dessins aux instruments, c'est-à-dire des objets de GI, soit des objets matériels ; les activités de classification occupent une place importante ; les résultats sont validés à partir d'une expérimentation répétée mais nécessairement limitée et un consensus local entre élèves. Cette situation évolue ensuite très progressivement. En 7B puis définitivement à partir de la classe de 2M (équivalent de la Seconde), les objets deviennent clairement des classes infinies, l'étude d'un nombre fini de cas n'est plus suffisant pour valider une affirmation (ce point de vue subit toutefois une certaine éclipse en 8B et 1M). L'impossibilité d'obtenir aux instruments une mesure exacte n'est pas mise en avant pour justifier la nécessité de processus formels de preuve. Au contraire, il semble que l'espace de travail adopté au Chili vive dans une « illusion de l'exactitude » : les objets du travail géométrique sont des classes de dessins réalisés aux instrument de tracés géométriques qu'il serait possible de mesurer exactement (ceci explique l'importance accordée aux instruments et aux techniques de tracés jusqu'en 3M). Cette idée n'est contestée qu'avec l'apparition des irrationnels à l'occasion de la mesure du périmètre et de l'aire du cercle en 8B : une mesure non décimale ne peut être déterminée exactement par mesurage.

L'Enseñanza Media est le lieu de l'entrée explicite de la démonstration dans le topos de l'élève. Mais les formes de la démonstration ne correspondent pas toujours aux canons de la démonstration formelle du paradigme GII. En 1M notamment, l'objectif visé est que les élèves produisent des argumentations cohérentes, qui peuvent associer des éléments formalisés à des preuves non axiomatisées comme des dessins et des pliages. L'année suivante donne lieu à un véritable travail sur l'apprentissage de la démonstration. Toutefois, on peut avancer qu'il ne s'accompagne pas comme en France d'une interdiction des autres formes de validation ; la démonstration est préférée quand elle est possible mais aucun statut de « théorème admis » ne vient différencier des résultats non démontrés. Il règne donc un certain flou sur l'espace du travail géométrique, d'autant que jusqu'à la fin de la scolarité, les théorèmes enseignés donnent lieu à des activités portant sur des objets de GI dans le but explicité à tous les niveaux d'aider les élèves à donner du sens aux connaissances mathématiques.

Nous tenons à avertir le lecteur de la différence d'organisation des deux parties : l'étude consacrée à l'enseignement français étant constituée de trois axes relativement autonomes, on trouvera pour chacun une conclusion à la fin de la section qui lui est consacrée ; pour le Chili, au contraire, nous examinons successivement les différents niveaux et présentons dans une synthèse qui termine l'étude le processus d'évolution que nous avons ainsi pu repérer.

3.1 Le cas de la France

Le passage de la Géométrie I à la Géométrie II est marqué par un changement des objets d'étude : on ne s'intéresse plus à des dessins matériels, ni même à des classes de dessins définis par des programmes de tracé, on s'intéresse désormais à des objets que nous nommerons figures[2] dont on pourrait dire qu'ils sont doublement abstraits : d'une part ce sont des classes d'objets définies à partir d'objets initiaux par un enchaînement de relations qui les caractérisent, d'autre part les objets en jeu sont sans existence matérielle puisque dépouillés de la plupart des attributs des objets physiques. Dès lors, le dessin ne peut plus d'aucune façon être outil de validation, que ce soit de manière perceptive ou instrumentée ; seules des démonstrations, c'est-à-dire des déductions logiques à partir des données initiales et d'un corpus à construire de théorèmes peuvent établir des assertions. Dans ce contexte, un simple principe d'économie va pousser à la détermination de définitions minimales et précises puis de caractérisations minimales et le plus variées possible des objets géométriques : il n'est plus indifférent de savoir si pour établir qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il faut établir le parallélisme et l'égalité des longueurs des côtés opposés, si chacun de ces éléments suffit ou si un seul d'entre eux est caractéristique.

Pour notre étude, nous avons donc choisi pour la France deux entrées : d'une part le rôle joué par les dessins dans l'activité géométrique en dimension 2, avec une attention particulière sur l'usage des instruments de dessin, d'autre part l'importance accordée à l'apprentissage de la démonstration, nous intéressant entre autre à l'apparition des caractérisations minimales. Nous nuancerons les résultats de cette étude en examinant le cas de la géométrie dans l'espace. Au passage, nous préciserons comment les textes officiels prennent en charge le changement de paradigme.

3.1.1 Cas de l'étude des configurations en géométrie plane ; statut du dessin, place du dessin aux instruments

Elêmentaire

Cycle 2

Les élèves sont invités à pénétrer dans un monde social (déjà-là) de formes graphiques, les objets de la Géométrie I, l'enjeu étant de leur faire acquérir une reconnaissance globale perceptive de certaines d'entre elles puis un vocabulaire permettant l'expression des propriétés des figures à connaître. Le travail prend appui sur des manipulations d'objets de l'espace et conduit à des activités de classification, de description et de vérification. Les tâches de vérification reposent sur des critères perceptifs globaux ou plus analytiques et instrumentés ; dans ce cas, la liste des critères utilisés ne vise pas un caractère minimal.

Du point de vue de la technique du dessin, les activités graphiques sont limitées puisque consistant à joindre des points. Parmi les instruments classiques du dessin géométrique, la règle est au c œur des acquisitions visées, équerre et compas occupant une place marginale, ceci explique la remarque précédente. Un rôle important est conféré aux gabarits comme outil de vérification.

[2]Nous reprenons à notre compte dans ce qui suit, la distinction dessin/figure de Arsac (1998) et Parzysz (1988). Les dessins sont des tracés matériels, ce peut-être des épures (réalisés aux instruments), des dessins à main levée et des dessins codés (schémas). En géométrie I, les dessins peuvent être produits en tant que modèles de l'espace concret ; en géométrie II, les dessins sont des représentations des figures du plan ou de l'espace géométrique.

Cycle 3

Les contenus et compétences visés sont les suivants : acquisition de connaissances relevant de la Géométrie I, apprentissage portant sur l'emploi des instruments du dessin géométrique (règle, équerre et compas), acquisition de techniques de tracés aux instruments liées au développement des savoirs de la Géométrie I.

Le cycle 3 vise explicitement à développer les apprentissages liés aux conversions entre registre discursif et registre graphique dans les deux sens possibles avec également apparition du registre graphique des schémas. Ceci est un premier élément du cheminement vers la Géométrie II. En effet, le programme de tracé est une représentation du dessin qui introduit nécessairement une distance avec l'objet matériel « dessin » . Par contre, l'idée qu'un même programme de construction peut donner lieu à des dessins différents ne figure pas comme une notion qu'il serait intéressant de faire travailler en conduisant les élèves à envisager des classes de dessins. On peut plutôt conjecturer que les travaux de reproduction risquent de faire apparaître négativement la multiplicité des dessins issus d'un programme comme une faillite du programme en question, un critère d'invalidation. Or cette notion de classe de dessins introduit la nécessité du raisonnement comme outil de preuve, elle constitue une étape d'une progression vers la Géométrie II.

Concernant le raisonnement, l'introduction mentionne l'argumentation comme une part importante du travail à effectuer. On peut penser que ce type d'activité est particulièrement présent dans la tâche « Vérifier l'existence d'une figure simple dans une configuration plus complexe, en ayant recours aux propriétés et aux instruments » qui suppose une validation « Le recours aux instruments vient valider les hypothèses faites sur des propriétés supposées ».

En résumé, au cycle 3, le travail de géométrie plane est intégralement situé en Géométrie I, avec un développement d'une vision analytique des dessins et d'activités discursives les concernant ; l'interaction avec le dessin instrumenté est essentielle. Le cheminement vers la géométrie II serait possible mais n'est pas un enjeu explicité à l'intention des enseignants.

Collège

Sixième

L'étude des instructions officielles et des textes d'accompagnement montre que cette classe s'intéresse encore particulièrement aux activités de dessin instrumenté en interaction avec des activités discursives. Comme au primaire, une grande place est accordée aux activités de dessins géométriques (usage des instruments avec apprentissage lié à l'usage du rapporteur, nouvelles techniques de tracés) ; une attention particulière est portée aux qualités pratiques que sont l'ordre et le soin. Tous les types d'activité de réalisation de dessins rencontrés au Cycle 3 sont poursuivis (à partir d'un texte, d'un modèle, d'un schéma).

Mais par rapport à l'Elémentaire, le programme de sixième est marqué par une évolution de fond : la possibilité de valider par usage d'instruments n'est plus mentionnée ; par contre, un accent nouveau est mis sur l'apprentissage du raisonnement et la mise en place de séquences déductives. C'est ainsi qu'on peut trouver les recommandations suivantes :

> [Au niveau géométrique, les programmes du collège s'organisent autour de 4 objectifs, l'un d'entre eux concerne les figures planes] :
>
> « Passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés. »
>
> Travaux géométriques (p.20) Reproduction de figures planes simples.
>
> La rubrique commentaire précise :
>
> « Les travaux géométriques permettront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant, par exemple, sur la définition du cercle et les propriétés d'or-

> thogonalité et de parallélisme. »

Ce changement de règle du jeu est-il progressif ? Comment est-il justifié ? Il est possible de le fonder épistémologiquement en continuant à s'intéresser aux objets de GI (soucis de précision, intérêt porté aux classes de dessins, autant de positions qui constituent d'ailleurs un jalon vers GII), est-ce le point de vue que les enseignants doivent adopter ou bien le passage aux objets de GII est-il sous-jacent à ce nouveau contrat ? Les textes restent quasiment muets à ce sujet, la seule précision se trouvant dans les commentaires sur la place des calculatrices et de l'informatique (p.31) :

> [...] « Les logiciels de construction géométrique permettent une approche plus dynamique des figures. En cela, ils contribuent à initier au type de raisonnement que l'on se propose de mener sur les objets théoriques de la géométrie. »

Repris et précisé dans les textes d'accompagnement du programme de Troisième, ce commentaire peut être interprété comme une référence à une vision de la figure en tant que classe d'objets mais l'allusion est pour le moins furtive.

S'ils font référence à l'énoncé et à l'usage par les élèves de quelques propriétés, voire de propriétés caractéristiques de certaines figures possédant un axe de symétrie, ces textes ne disent rien de la façon dont ces résultats sont établis par l'enseignant, pas même en introduisant comme cela sera fait ultérieurement la notion de « théorème admis ». Remarquons enfin que le programme recommande de ne pas demander aux élèves d'établir par raisonnement des propriétés évidentes. Qu'est-ce qu'une propriété évidente ? S'il s'agit d'une évidence perceptive, c'est bien qu'on ne demande pas aux élèves de prouver ce dont un dessin peut les assurer, ce qui est contradictoire avec l'interdit pesant sur les validations aux instruments.

Une étude des manuels nous a permis de préciser la situation effective relativement au recours aux instruments de mesure.

Etude complémentaire au niveau des manuels[3]

Nous avons analysé les trois manuels de sixième les plus utilisés : *Transmath* (Nathan), *Triangle* (Hatier) et *Cinq sur Cinq* (Hachette) -édition 2000.

Un seul (*Triangle*) ne pointe pas particulièrement l'impossibilité de lire des résultats sur un dessin, à vue ou par instrument ; les auteurs ne donnent pas un statut spécifique aux observations sur dessins qu'ils ne s'interdisent pas de faire réaliser aux élèves. Les deux autres insistent sur l'impossibilité d'être certain en utilisant des instruments et sur la nécessité de démontrer pour prouver en mathématiques :

> « Utiliser une règle graduée ou un rapporteur pour mesurer, un compas pour comparer des longueurs comportent un risque d'imprécision. Se fier à des impressions au regard d'une figure est dangereux [...] Aussi en mathématiques, observer une propriété sur une figure n'est pas suffisant. Il faut ensuite la démontrer à partir des données de l'énoncé » (Transmath).

Il apparaît dans ce texte que c'est l'impossibilité de réaliser une mesure exacte qui est mise en avant pour proscrire le mesurage. On peut considérer cette position comme l'indice implicite d'un passage aux objets théoriques de GII (les points sans dimension d'Euclide) ; en effet, une autre approche de la mesure serait possible dans le paradigme GI, celle des physiciens qui s'emploient à contrôler les incertitudes. Ce manuel ne fait pas référence à l'idée de propriété générale qu'il faudrait valider pour une classe d'objets.

Notre étude a consisté à rechercher dans les chapitres qui semblent les plus propices à ce genre de tâches, gestion de données et géométrie, les exercices qui donnent lieu à une

[3] Voir annexe p 57.

prise d'information par mesure sur un dessin ou sur un objet et ceux qui demandent une reproduction à l'identique de dessins non côtés donnés sur papier blanc (cette tâche suppose de prendre des informations par mesure ou relevé au compas sur le dessin à reproduire). Nous avons mis en évidence les éléments suivants :

> *Gestion de données*
>
> Les représentations ne sont quasiment pas utilisées pour prélever directement de l'information.
>
> *Géométrie*
>
> Si l'on excepte le chapitre sur les angles dont l'enjeu central est, dans deux des manuels au moins, l'apprentissage de l'usage du rapporteur, on constate le caractère très marginal de la prise d'informations par mesure sur dessin ou sur objet : le pourcentage du nombre d'exercices nécessitant une mesure relativement au nombre total d'exercices est de 9.5 % dans Triangle, 4.5 % dans Cinq sur Cinq, 2,8 % dans Transmath ; dans les deux premiers manuels, le taux tombe respectivement à 4,2 % et 1,3 % si l'on exclut le chapitre sur les angles.
>
> Les tâches consistant à reproduire à l'identique des dessins donnés sur papier blanc sans aucun codage ou information complémentaire sont également peu présentes : 1.6 % des exercices pour Triangle, 4,3 % pour Cinq sur Cinq et 8,8 % pour Transmath.[4]

Nous retiendrons donc que dès la Sixième, si l'on excepte le rapporteur dont l'emploi est un enjeu d'apprentissage, les instruments servent quasi uniquement à tracer, ils traduisent, incorporent des informations dans le dessin mais ne permettent pas d'en obtenir. Si des mesures sont nécessaires (construction de figures, calcul de mesures, étude de situations concrètes), les valeurs sont le plus souvent données par le texte. On assiste véritablement à **une éviction du mesurage du champ de l'activité mathématique**, pour la raison qu'aucune mesure ne peut être exacte.

En l'absence d'une présentation explicite du changement de paradigmes, ce programme peut recevoir deux interprétations radicalement différentes entre lesquelles il est difficile de percevoir l'intention des concepteurs, d'autant que le texte n'est pas exempt de contradictions :

- Maintien en géométrie I dans le prolongement de l'élémentaire avec disqualification des instruments comme outils de validation et développement du raisonnement ;
- Passage en géométrie II à laquelle les élèves n'ont en rien été préparés.

Toutefois, dès lors que le mesurage est évincé comme incapable de donner une mesure exacte, il en résulte implicitement que les dessins, même réalisés avec soin, ne sont pas les véritables objets sur lesquels on travaille. Par ailleurs, en l'absence d'explicitation, on peut conjecturer que la culture mathématique des enseignants les conduit à se situer en géométrie II, sans nécessairement avoir conscience du changement de paradigme imposé aux élèves.

Cinquième/Quatrième

A partir de cette classe, le tracé de dessins n'est plus un objectif central, il n'est plus fait référence aux instruments. Aucun instrument nouveau n'est mentionné (on pourrait par exemple comme au Chili évoquer le pantographe à l'occasion du théorème de Thalès ou des agrandissements/réductions en 5^{e} ou en 3^{e}) et les anciens ne sont plus jamais cités. Si le programme définit encore un certain nombre d'objets plans que les élèves doivent apprendre

[4] Ce dernier manuel accorde visiblement plus d'importance à la reproduction de dessins que les deux autres et dans ce contexte, à la construction de symétriques d'un dessin donné, ce qui conduit à un nombre élevé de reproductions de dessin. Les programmes en vigueur depuis 2006 en Sixième se traduise par une évolution sur les sujets étudiés ici.

à tracer (voir tableau synoptique), les procédés de construction et les instruments à utiliser ne sont pas explicités.

Enfin, le texte d'Accompagnement des programmes de 5^e et 4^e contient (p.65) un paragraphe consacré aux problèmes de construction qui marque un changement de conception vis à vis de la tâche de construction. Jusqu'alors, le terme « Construire » a été utilisé dans les textes pour désigner des techniques connues (construire les droites remarquables d'un triangle, la tangente à un cercle en l'un de ses points) ; le paragraphe « Problèmes de Construction » relativise l'importance du tracé lui-même et met l'accent sur les démarches de recherche et de validation du procédé dans les cas où l'élève ne le connaît pas a priori.

Plusieurs autres indicateurs donnent à penser que le passage en Géométrie II est considéré dès la 5^e comme réalisé, a fortiori en 4^e :

– Traiter en 5^e, du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (G. Arsac, 1998 ; R.Floris, 1995), en 4^e de l'intersection d'un cercle et d'une droite, réfléchir à la distinction valeur exacte/valeur approchée dans le théorème de Pythagore et sa réciproque supposent que l'on a affaire à des objets sans dimension.
– Les élèves doivent pour la première fois en 5^e connaître et utiliser des propriétés caractéristiques : « l'énoncé et l'utilisation de propriétés caractéristiques du parallélogramme » figurent parmi les connaissances visées (on insiste sur la nécessité de « formuler ces propriétés à l'aide d'énoncés séparés ». « Des séquences déductives pourront s'appuyer sur ces énoncés » p. 44). En 4^e le corpus des théorèmes et caractérisations introduits s'élargit beaucoup (droite des milieux et réciproque, théorème de Thalès, théorème de Pythagore et réciproque, inscription d'un triangle rectangle dans un cercle et réciproque, concours des droites remarquables) ; le programme introduit la notion de théorème réciproque. Les acquisitions relatives à la pratique de la démonstration sont mises en avant.
– Les élèves sont supposés différencier les démarches de conjecture et de démonstration. Le statut des résultats du cours est clarifié : certains sont démontrés, les autres sont déclarés admis :

> *Accompagnement des programmes du cycle central.*
>
> *Deuxième partie : Raisonnement et démonstration en géométrie.*
>
> « Ce paragraphe ne concerne que la géométrie bien que la démonstration s'applique à d'autres domaines. [...] Les programmes prévoient une progression dans l'apprentissage de la démonstration. [...] Pour tout le cycle central, il est de la responsabilité du professeur, en fonction de ses élèves, de décider de l'opportunité de démontrer certains résultats du cours (leur statut, admis sur conjecture ou établi, doit cependant être clair) et d'organiser des étapes de recherche et de rédaction. » p.64

On notera que les différents éléments relevés ne sont pas intégrés dans les textes au sein d'une réflexion approfondie sur le changement de paradigme. Mais ils nous permettent d'affirmer que pour les concepteurs du programme la géométrie plane du cycle central du collège, au moins de la 4^e, est la Géométrie II. Pourtant à aucun moment, la question du changement de paradigme n'aura été explicitement soulevée comme un problème d'enseignement.

Dans les classes postérieures à la quatrième, le passage en GII n'est évidemment pas remis en question pour la géométrie plane.

Troisième

Seules quelques lignes figurant dans les textes d'accompagnement font mention du dessin aux instruments :

> p.93, I. Contenus de la classe de 3^e A. Configurations du plan et de l'espace, transformations planes « Les activités de conjecture, d'expérimentation et de démonstration sont poursuivies ainsi que la pratique du dessin de figures aussi bien à main levée qu'à l'aide des instruments de dessin et de mesure, y compris dans un environnement informatique. »

La compétence « Construire » apparaît à propos de la construction du représentant d'un vecteur somme, des images par rotation de certaines figures et enfin de polygones réguliers à partir du centre et d'un sommet. Des problèmes de construction sont évoqués à propos du théorème de Thalès

> « Étant donnés deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport CA/CB a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers » p.78),

des rotations

> « Ces propriétés pourront être utilisées dans la résolution de problèmes simples de construction »

et des polygones

> « Les activités sur les polygones réguliers, notamment leur tracé à partir d'un côté, porteront sur le triangle équilatéral, [...] et éventuellement l'octogone. Certaines d'entre elles pourront conduire à utiliser la propriété de l'angle inscrit » p.80).

Enfin la rubrique « II. L'outil informatique et l'enseignement des mathématiques au collège » des textes d'accompagnement abordent le rôle des logiciels de construction géométrique et met en avant les possibilités qu'ils offrent :

> « Ils constituent un moyen puissant d'exploration des figures, facilitent l'observation des propriétés. [...] Leur utilisation au collège présente deux caractéristiques particulièrement intéressantes. La première est l'explicitation des propriétés mises en œuvre pour les constructions [...] La seconde a trait à l'expérience graphique que font les élèves en observant une figure dont on déplace les éléments variables. Des propriétés apparaissent et provoquent des questions qui motivent et préparent à la démonstration. ».

Cette déclaration met en avant la dimension « classe d'objets » de la figure mais en considérant que de tels travaux sont une motivation à la démonstration, elle suppose que l'espace de travail est bien celui des objets de la Géométrie II. En effet, la dimension dynamique prive la démonstration d'une réelle nécessité comme outil de validation pour des classes d'objets de GI ; la démonstration ne garde véritablement sa fonctionnalité que dans un travail sur les figures abstraites de GII. Les auteurs de ces programmes semblent ignorer les travaux didactiques qui précisément ont montré la difficulté à conserver du sens à la démonstration dans un milieu intégrant l'usage de ces logiciels.

Lycée

Seconde

Le programme comme les textes d'accompagnement ne font référence ni à des techniques de tracé/construction nouvelles, ni à des problèmes de construction (le programme précédent présentait la configuration des deux tangentes à un cercle issues d'un point dont le programme de construction pouvait être abordé à l'occasion).

On peut noter l'allusion suivante à un détachement nécessaire par rapport au dessin, dans la brochure d'accompagnement (p.9) qui prolonge l'extrait mentionné ci-dessus des Accompagnements du programme de 3^e :

> Place des TICE
> Les logiciels de géométrie dynamique conduisent les élèves à utiliser les outils de la géométrie dans un autre contexte. Ils les amènent à se démarquer du dessin : toute tentative de déplacement de la figure par l'élève pénalisera la moindre négligence d'hypothèse de l'énoncé ou au contraire validera la construction.

Première S, Terminale S

Aucune nouvelle compétence concernant les constructions à connaître ne figure dans les programmes (pourtant il pourrait y en avoir ; par exemple, savoir construire à la règle et au compas l'image d'un point par une homothétie définie par l'image de deux points).

Par contre, dans les rubriques « Transformations » en Première S, « et Similitudes planes » en Spécialité Terminale S, il est précisé que toutes les transformations connues seront utilisées dans la recherche de problèmes de construction, en particulier à travers les logiciels de géométrie. La brochure d'accompagnement propose en Terminale (p.65) un exemple de problème de construction

> « Construire un triangle ABC directement semblable à un triangle donné ABC, connaissant la position de A et sachant que B et C sont situés sur deux cercles donnés ».

Ce problème donne une idée de ce qui est visé à ce niveau sous la dénomination problème de construction : les instruments ne sont pas précisés, la réponse peut être limitée à la définition d'une suite d'objets mathématiques définissant in fine un ou des objets dont on démontre qu'ils conviennent ; cet exemple très classique donne même lieu à une discussion.

Par rapport à l'usage des instruments de dessin, il est clair qu'à partir de la 4^e, la géométrie ne s'intéresse plus guère aux apprentissages relevant de techniques du dessin géométrique. De la 4^e à la Première S, aucun instrument n'est mentionné par les textes. En Terminale S, les programmes ne reviennent pas non plus sur ce sujet ; par contre, la brochure d'Accompagnements donne comme exemple dans la rubrique « Enseigner les mathématiques - Résoudre des problèmes » le problème de la duplication du cube (p.14) qui conduit à un développement sur la notion de constructibilité (nombres constructibles à la règle et au compas). Mais il s'agit là d'une suggestion que les enseignants ne sont pas obligés de suivre. En revanche, le programme de l'option facultative de mathématiques en série Littéraire[5], contient en Géométrie plane, pour la Première, les rubriques « Constructions et tracés *à la règle et au compas* »), « Constructions de polygones réguliers », « Problèmes de construction », « Nombres constructibles » et « Commensurabilité et algorithme d'Euclide », pour la Terminale, « Nombre d'or et pentagone régulier ». A ce niveau et dans cette section, l'enseignement de géométrie a à la fois une valeur technique (certains élèves de L sont spécialisés en Arts Plastiques) et culturelle (en liaison avec l'histoire et en particulier l'histoire de l'Art). On retrouvera ces deux dimensions à propos de la géométrie dans l'espace.

Conclusion

Le lien de l'activité géométrique avec le dessin instrumenté est très fort au primaire et en sixième. A l'école, il est clair que le travail géométrique relève de la Géométrie I. En sixième, il peut en être de même mais les instructions ne permettent pas de trancher, même si l'invalidation des instruments comme outils de preuve rend le maintien dans GI assez

[5]Les options facultatives de Première et Terminale L s'adressent à des élèves, qui dans leurs études ultérieures et leur vie professionnelle devront savoir soit utiliser ou enseigner des mathématiques (tels les futurs professeurs des écoles) soit comprendre et être capable de travailler sur des arguments et des raisonnements de nature mathématique dans des domaines variés.

délicat. La cinquième est une année de transition où le lien avec le dessin s'affaiblit en même temps que le changement de paradigme est repérable à plusieurs indicateurs (importance des propriétés caractéristiques, distinction conjecture/théorème, début de l'apprentissage de la démonstration) bien qu'aucun moment de rupture ne soit mis en avant.

A partir de la quatrième, on est clairement en Géométrie II ; celle-ci produit encore des connaissances techniques de dessin pendant les deux dernières années du collège mais ce point de vue disparaît dans le texte des programmes au lycée ; seule l'option facultative destinée aux élèves littéraires fait explicitement allusion à des travaux débouchant sur des tracés effectifs à la règle et au compas.

Les problèmes de construction (au sens que prend ce type de tâches dans les paradigmes théoriques de la géométrie) évoqués à partir de la 4^e reçoivent une place plus explicite en Première et Terminale Scientifiques à un moment où la réalisation effective des dessins modélisant les figures construites n'est plus qu'un souci marginal. Il ne s'agit pas de résoudre des problèmes de dessins techniques.

Le passage de la Géométrie I à la Géométrie II n'est pas explicité, il n'est ni justifié ni préparé. Ce changement évident de paradigme se manifeste par un changement d'outil de validation, la démonstration devenant le seul outil accepté et ce quasiment dès la sixième. Cette option se traduit en particulier par l'importance accordée dès la cinquième aux propriétés caractéristiques et à la distinction de fait (les termes ne sont pas enseignés) entre condition nécessaire et condition suffisante. Mais cette rupture n'est pas explicitement motivée, le changement d'objets d'étude, du dessin à la figure, reste implicite dans les textes officiels.

La partie suivante traite précisément de la place accordée en France à l'apprentissage de la démonstration. Cette étude confirmera les analyses qui viennent d'être présentées.

3.1.2 La géométrie comme terrain privilégié pour l'apprentissage de la démonstration

Même si l'apprentissage du raisonnement n'est pas totalement absent au primaire[6], nous commencerons cette étude en Sixième.

Collège

L'étude des textes officiels fait clairement apparaître que l'apprentissage de la démonstration est un enjeu de l'enseignement de mathématique au collège et que LE domaine qui est le cadre de cet apprentissage est la géométrie, du côté de l'enseignant (démonstration des théorèmes) comme du côté de l'élève. Seuls quelques passages font fugitivement allusion à la dimension « Démonstration » des domaines numériques et algébriques dont les ressources sur ce plan ne sont pas mises en avant.

> Préambule au programme de 6^e, concernant l'ensemble du collège
>
> A. Les mathématiques comme discipline de formation générale p.15
>
> « A travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié. »

[6] « L'argumentation à propos des outils utilisés, des propriétés mobilisées et des résultats obtenus constitue une part importante du travail des élèves. Dans cette perspective, quelques raisonnements peuvent être conduits, en particulier sur des figures dessinées à main levée. » Accompagnement Cycle 3 ; Espace et Géométrie p.30

> Au niveau géométrique, les programmes du collège s'organisent autour de 4 objectifs dont le suivant :
>
> « Prendre contact avec des théorèmes et apprendre à les utiliser. »
>
> Les objectifs assignés aux travaux numériques font référence à l'emploi du langage algébrique pour résoudre des problèmes mais la dimension raisonnement n'apparaît pas explicitement[7].

En géométrie, le terme « démontrer » apparaît explicitement en cinquième du côté de l'enseignant, certains résultats du cours (somme des angles d'un triangle, concours des médiatrices) peuvent être démontrés ; de l'élève on attend des séquences déductives (à propos du parallélogramme et de la symétrie centrale par exemple) qui prennent progressivement la forme de démonstration ; celle-ci devient clairement en quatrième un élément relevant du topos de l'élève.

Par contre, bien que les occasions existent (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, règle de multiplication des fractions en 5^e, formules littérales en 4^e), les rubriques « Travaux Numériques » et « Organisation et gestion de données » des programmes proprement dits ne mentionnent à aucun moment cette idée de démonstration ni pour le professeur, ni pour l'élève. Seule une courte phrase dans l'introduction de la rubrique « Raisonnement et démonstration en géométrie » (p.64) des Accompagnements rappelle que la démonstration s'applique à d'autres domaines que la géométrie. Mais, si on parle à plusieurs reprises de l'emploi du calcul littéral pour la résolution de problèmes (4^e p.54, 3^e p.81), les possibilités qu'il offre pour établir des résultats généraux ne sont pas plus précisément mises en avant ; sur le plan du raisonnement, les textes insistent au contraire, à propos des activités de tests par substitution sur les notions d'exemples, de contre-exemples, de cas particulier en opposition au cas général et donc de raisonnement par contre-exemple (p.63).

En troisième, on retrouve les traits décrits pour le cycle central. En géométrie la sophistication des raisonnements fait un pas en avant puisque les démonstrations basées sur le principe de non-contradiction sont présentées comme une pratique à développer. L'algèbre n'est toujours pas un terrain de raisonnement, même si les résolutions d'équations, inéquations et systèmes d'équations devraient (ou pourraient) donner lieu à une réflexion explicite d'ordre logique. On insiste sur la pratique de test, démarche qui ne peut en aucun cas conduire à l'ensemble des solutions en cas d'ensemble infini. Rien n'est signalé quant à la structure logique du raisonnement qui nécessiterait pour le moins dans le cas où la solution est unique un raisonnement par condition nécessaire puis vérification. Par ailleurs, le rôle que peut jouer le calcul littéral dans des démonstrations est toujours omis.

> IV Au terme du collège
>
> A. La formation générale p.101
>
> Les élèves « ont eu l'occasion d'élaborer au cours de démonstrations différents types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement par disjonction des cas lors de l'examen de l'effet de la multiplication sur l'ordre, infirmation par mise en évidence d'un contre-exemple, approche du raisonnement par l'absurde lorsqu'il s'agit de reconnaître si une configuration est une configuration de Thalès ou si un triangle est rectangle. »

[7] La notion de théorème n'apparaît à aucun moment dans les programmes du collège en dehors du contexte géométrique.

Lycée

Seconde

Les textes officiels manifestent clairement des intentions liées à l'apprentissage de la démonstration et à la rédaction avec une insistance nouvelle sur la structure logique distinguant notamment implication et équivalence, invitant à travailler sur le et et le ou. Contrairement au collège, le programme lui-même mentionne à plusieurs reprises le fait que les différentes considérations concernant ce point ne doivent pas concerner uniquement la géométrie ; c'est notamment le cas du paragraphe consacré au calcul algébrique. Par contre, la brochure d'accompagnement ne propose aucun exemple illustrant ces injonctions.

Première S

Le programme de Première S commence par une déclaration générale d'intentions concernant l'enseignement scientifique qui explicite très précisément la volonté du système français d'un apprentissage poussé de la démonstration accompagné d'une première réflexion sur la logique et montre pourquoi la géométrie constitue encore à ce niveau le terrain privilégié du travail de la démonstration, l'analyse étant insuffisamment formalisée :

> 1. Généralités à propos d'une formation scientifique en première et en terminale S
>
> La démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité puis en détailler les différentes étapes a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France.
>
> ... Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi, pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration académique ; en analyse, par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées. ...

Plusieurs formes classiques de raisonnements sont désignées comme enjeux d'apprentissage (par contraposition, par l'absurde, par disjonction des cas).

En Première S, seule la rubrique « Géométrie » du programme fait référence à l'activité de démonstration des élèves, elle pose notamment comme objectif le travail du raisonnement par double inclusion et de la méthode d'analyse-synthèse pour l'étude des problèmes de lieux. Au sein de la rubrique « Analyse », les démonstrations sont explicitement mentionnées dans le topos de l'enseignant pour deux théorèmes concernant les suites, théorème des gendarmes et unicité de la limite dans le cas des suites, les théorèmes sur les opérations étant pour la plupart admis. Par contre, en l'absence d'une formalisation suffisante, les résultats concernant dérivée et limites de fonctions sont seulement montrés sur des exemples puis énoncés.

Signalons enfin que le développement consacré à la démonstration dans la brochure Accompagnement des programmes introduit à propos de l'analyse des variations sur les formes de justifications attendues des élèves : l'idée de démonstration est étendue d'une part à celle d'argumentation convaincante, y compris visuelle ou graphique et d'autre part à celle de calcul, une des spécificités du calcul étant qu'on n'y est pas tenu d'expliciter les théorèmes utilisés, théorèmes qui dans ce cas sont considérés comme des règles (cet élément est repris dans le programme de Terminale à propos des calculs de limites).

Terminale S

En Terminale S, la question du raisonnement n'apparaît plus dans les rubriques consacrées à la géométrie. Par contre, les ressources offertes par l'enseignement d'Arithmétique en Spécialité sont mises en avant à plusieurs reprises, tant pour l'enseignant que pour l'élève.

En Analyse, poursuivant la tendance repérée en Première S, le programme de Terminale renforce la place des démonstrations dans le topos du professeur. Pour l'élève, rien n'est explicité et les exigences semblent surtout reposer sur l'emploi de règles opératoires (algébrisation de l'analyse) ; les exigences de mise en forme sont limitées. Néanmoins, l'étude des suites est l'occasion d'une présentation du raisonnement par récurrence qui fera effectivement l'objet de travaux pour les élèves.

Conclusion

Cette analyse des programmes du collège et du lycée fait très clairement apparaître les objectifs ambitieux de l'enseignement français vis à vis de la démonstration formalisée. Elle montre que la géométrie constitue le terrain privilégié de cet apprentissage. Cette situation s'explique pour une part par l'insuffisance du corpus des définitions et théorèmes admis disponibles (axiomatique locale) en Analyse, qui rend inaccessibles la plupart des démonstrations dans ce domaine, du moins sous les formes dont l'apprentissage est visé. Dans ces conditions, si les élèves sont bien confrontés à des démonstrations en algèbre et en analyse, c'est le plus souvent sous les traits du calcul : les résultats admis prennent le statut de règles opératoires que les élèves doivent finalement apprendre à utiliser de manière automatisée, sans les citer. Ce terrain est donc peu favorable à l'apprentissage de la forme de démonstration visée, par modus ponens essentiellement ; néanmoins, il offre quelques ressources qui ne sont guère mises en avant par les textes.

Ainsi il apparaît que l'apprentissage de la démonstration formalisée est l'une des raisons d'être majeures de l'enseignement de la géométrie en France. Mais une telle fonction ne peut être entièrement assumée en Géométrie I, ce qui motive sans doute le passage précoce à la Géométrie II, du moins pour l'étude des configurations planes.

Toutefois des études complémentaires, consacrées aux transformations du plan d'une part, à la géométrie dans l'espace d'autre part, montrent que les progressions proposées par les textes officiels français ne sont pas exemptes de contradiction relativement au changement de paradigme. Nous présentons dans la partie suivante la deuxième de ces études, représentative des phénomènes observés pour les deux thèmes.

3.1.3 Géométrie dans l'espace

Que ce soit dans le cadre de GI ou dans celui de GII, la géométrie de dimension 3 est a priori un cadre essentiel pour la modélisation des objets et situations réels. De plus, du point de vue du dessin géométrique, la représentation plane de l'espace joue un rôle social fondamental et nécessite l'apprentissage de plusieurs techniques (vues, perspectives, patron). On peut donc s'attendre à ce que l'enseignement de la géométrie dans l'espace prenne plus particulièrement en charge des apprentissages liés à la pratique de la modélisation d'une part, au dessin technique d'autre part. En complément de l'attention portée au paradigme géométrique, notre étude s'intéressera donc à ces deux dimensions.

Elémentaire

Les Documents d'application des programmes des cycles 2 et 3 de l'école élémentaire mettent clairement en évidence les trois enjeux différents : constructions de connaissances spatiales sur l'espace, relation de modélisation du monde réel par des objets particuliers du micro-espace (rubrique « Repérage et Orientation »), construction (au plan cognitif) de certains solides du micro-espace en interaction avec une activité de Géométrie I (Rubrique

« Solide »). Au cycle 3, la question des représentations planes de solides (vues, patrons) est abordée sous plusieurs angles (tâches de reconnaissance et de construction de solides).

Collège

Au niveau géométrique, les programmes du collège s'organisent autour de quatre objectifs, l'un d'entre eux concerne la géométrie dans l'espace, il s'agit du suivant :

> Préambule au programme de 6^e , concernant l'ensemble du au collège
> « Etre familiarisé avec les représentations de l'espace, de l'application des conventions usuelles (lignes cachées, perspective) aux traitements permis par les représentations. »

Sixième/Cycle central

Le programme de sixième maintient un lien avec l'espace réel, il évoque trois types d'objets, l'objet « vrai », éventuellement réalisé en technologie, la maquette ou solide de l'espace que l'élève doit apprendre à réaliser à partir d'un patron et la représentation dessinée de l'objet et/ou de sa maquette. Nous avons donc a priori affaire à deux niveaux de modélisation mais il n'est plus fait mention de situations relevant du monde réel, de plus le fait que les objets réels considérés puissent être fabriqués en technologie laisse à penser que les objets en question sont de taille réduite et d'un réalisme relativement limité. Par rapport à l'élémentaire, la portée de l'activité de modélisation est donc restreinte. De plus, compte tenu de la séparation des disciplines, on peut se demander si le cours de mathématique donne vraiment aux élèves l'occasion de travailler à la modélisation de véritables objets. Il est possible, sinon très probable, que le travail accompli s'appuie uniquement sur des maquettes et leurs modélisations en dimension 2, les connaissances produites en Géométrie I permettant en retour de développer les connaissances techniques de réalisation de ces objets par patrons.

Les instructions ne font à aucun moment référence à une démarche déductive à propos de géométrie dans l'espace ; on est clairement dans une géométrie d'observation orientée vers les réalisations de maquettes, parallèlement à un apprentissage strictement technique du dessin en perspective.

Enfin le travail dans l'espace dont celui sur les solides est placé dans une visée à long terme de construction cognitive des idées de parallélisme et d'orthogonalité en dimension 3, dans le cadre des faces et arêtes de solides matériels.

Introduisant de nouveaux types de solides (prismes et cylindres droits en 5^e, pyramides et cônes de révolution en 4^e), les programmes de cycle central se situent totalement dans la ligne de celui de Sixième. Le seul élément qui puisse laisser à penser qu'une certaine évolution marque la classe de 4^e est l'accent placé par le texte sur le calcul de longueurs, aires et volumes. Dans la mesure où les théorèmes de Thalès et de Pythagore fournissent des outils pour ces calculs, dans les solides déjà rencontrés, on peut s'attendre à ce que ce type de tâches donne lieu à l'émergence en géométrie dans l'espace, jusque là exclusivement développée au sein du paradigme de la Géométrie I, de démarches utilisées en géométrie plane qui à ce niveau relève comme nous l'avons vu du paradigme de la Géométrie II. Une telle confrontation peut être source de contradictions (par exemple, comment justifier une orthogonalité ou un parallélisme dans une figure plane obtenue par section dans un solide de l'espace ?). Les textes ne contiennent aucune réflexion sur ce sujet.

Troisième

Le programme de 3^e marque une rupture explicite avec ceux des années précédentes sur plusieurs points :

– pour la première fois, il y a à savoir certains résultats ; ceux-ci sont conjecturés, mot nouveau en géométrie dans l'espace à partir d'observations réalisées sur des maquettes, puis démontrés ;

– dans le cadre de l'étude des sections d'une sphère par un plan, on s'intéresse au cas des plans tangents, ce qui laisse à penser que ces plans n'ont qu'un point d'intersection avec la sphère ; autrement dit, les objets sphère et plan en jeu sont des idéalités (remarquons que la sphère est le premier objet de l'espace dont une caractérisation est facilement accessible alors qu'une fabrication ne l'est pas).

Il semble donc que le programme de 3^{e} fasse basculer la géométrie dans l'espace en Géométrie II. Ce passage n'est cependant pas clairement assumé sur tous les points : certains résultats liés à l'orthogonalité et au parallélisme dans l'espace sont nécessaires (un plan coupe deux plans parallèles suivant des droites parallèles et si une droite et orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan) ; or, si les commentaires font référence aux images mentales supposées construites au cours des années précédentes, ils ne précisent pas quel statut est donné aux résultats ci-dessus qui devraient être posés comme des théorèmes admis pour éviter un retour en Géométrie I (le premier de ces résultats n'est même pas explicité).

Lycée

Seconde

Le programme se situe sur deux plans vraiment très différents. D'une part, il met en avant les travaux d'observation, de représentation et de réalisation des objets matériels épurés, avec sur ce domaine d'activité une insistance plus forte qu'en 3ième. Le travail sur les différentes modalités de représentations est un sujet dominant dans les thèmes d'étude[8].

D'autre part, dans une démarche de modélisation déjà rencontrée au collège pour les transformations, il s'appuie sur l'observation des solides matériels pour formuler des propriétés attribuées aux droites et plans, c'est-à-dire à des objets mathématiques de Géométrie II (incidence et orthogonalité) ; le fait d'étudier la nature de l'intersection de deux plans nécessite de dépasser le point de vue des faces d'un solide, matériel ou abstrait, pour concevoir l'idée de plan illimité dans toutes les directions. Les propriétés en question prennent clairement le statut de propriétés admises, ce qui permet en particulier de situer totalement les questions de calculs de grandeurs au sein de GII. On ne sait pas dans quelle mesure les élèves sont confrontés à d'autres types de tâches relevant de la Géométrie II (cela pourrait être le cas pour le thème d'étude consacré aux sections planes, nous reviendrons sur cette question avec l'analyse du programme de Première S).

Première S

Le programme de Première S marque une étape nouvelle vers la Géométrie II : contrairement à celui de Seconde qui abordait les sections dans les thèmes d'étude sans aucune injonction précise, il est désormais demandé de construire des sections en justifiant. Cette question des sections est représentative des rapports Techniques de tracés/Géométrie II, c'est pourquoi nous nous y attarderons.

Quelle est la nature de la tâche « Construire une section » ? Il peut s'agir d'une tâche de tracé sur une représentation en perspective, laquelle tâche présente deux versants : tâche purement technique reposant sur des règles admises de tracé[9] (Type 1) ; tâche technique justifiée par référence à des théorèmes de Géométrie II comme les théorèmes

[8]Pour chacun des chapitres du programme (Statistiques, Calcul et Fonctions, Géométrie), le professeur doit choisir, pour l'ensemble des élèves ou pour certains seulement en fonction de leurs centres d'intérêt, un ou plusieurs thèmes d'étude. L'obligation concernant ces thèmes est donc minimale.

[9]Ceci est bien le cas pour certaines règles du dessin en perspective cavalière qui à aucun moment du secondaire ne pourront être justifiées mathématiquement puisqu'il faudrait pouvoir référer au caractère affine des projections parallèles sur un plan, ce qui est inaccessible au lycée ; ces règles constituent donc une axiomatique de la perspective cavalière en tant que dessin.

admis d'incidence (Type 2). Mais une tâche de construction en Géométrie II n'est pas une tâche de tracé (par exemple, construire la perpendiculaire commune à deux droites de l'espace signifie définir une droite, montrer que la définition donne toujours un objet et que cet objet répond bien au problème ; dans ce cas, la question d'une représentation dessinée est secondaire). Dans ce cadre, étudier la section d'un solide par un plan suppose de déterminer et justifier la nature de la section en explorant les variations possibles dans le champ des contraintes définissant le plan, celui-ci ne pouvant en aucun cas être déterminé uniquement par des données figurant sur une représentation en perspective (Type 3).

Auquel des trois types de tâches évoqués ici le programme de Première S renvoie-t-il ? On ne peut que constater l'absence totale de précision des instructions sur cette question.

Nous appuyant sur notre expérience des manuels, nous sommes tentés de conjecturer qu'en Première S, les tâches concernant l'obtention des sections en perspective relèvent du deuxième type envisagé ci-dessus (tracé justifié par un passage à GII sans prise en compte de la variabilité de la situation), ce qui voudrait dire que pour ce domaine le passage à GII ne serait pas achevé alors qu'en théorie, il l'est totalement en géométrie plane. Ce retard pourrait s'expliquer par la nécessité de réaliser des apprentissages autour de la représentation en perspective cavalière. Le travail accompli en géométrie autour de ce type de tâches occuperait donc jusqu'à ce niveau une fonction sociale liée aux techniques de représentation de l'espace.

Par contre, dans les autres rubriques de ce programme, le cheminement vers l'étude des objets de GII se poursuit avec la prise en compte des solides abstraits que sont devenus les cônes et les cylindres, l'algébrisation et la détermination des équations, enfin avec les démonstrations concernant les problèmes de concours, d'alignement dans l'espace.

Terminale S

Dans l'enseignement obligatoire, le point de vue est cette fois clairement interne à la Géométrie II (produit scalaire, caractérisation barycentrique des droites et plans, intersections de droites ou de plans : discussion géométrique, discussion algébrique). La brochure d'accompagnement donne l'exemple de l'étude du tétraèdre (p.51), il s'agit notamment de caractériser le concours des hauteurs ou l'égalité de longueurs des arêtes non coplanaires. Si des solides interviennent, il s'agit cette fois d'objets géométriques donnant lieu à des démonstrations (et pas seulement des calculs de grandeurs).

Dans l'enseignement de spécialité, une rubrique est consacrée aux sections planes de surfaces. L'objectif principal avancé est lié aux fonctions de deux variables : la géométrie est convoquée pour illustrer cette notion par le graphe (p. 68). Cependant l'usage de logiciels adaptés est mis en avant de façon à « visualiser sur écran les surfaces étudiées ». L'étude des sections est menée avec des outils analytiques (équations, fonctions d'une variable) mais débouche sur des représentations à partir des différentes sections. Il reste donc à ce niveau une trace d'un travail d'ordre graphique.

Notons pour terminer qu'en Première et Terminale L, l'option aborde en Première la perspective cavalière

> On illustrera en particulier ces propriétés [les propriétés usuelles de la perspective] en représentant l'ombre d'une fenêtre éclairée par le soleil sur les murs d'une pièce), en Terminale, la perspective à point de fuite (Le problème du dessin d'un carrelage régulier est l'un des plus célèbres que se sont posés les peintres du début de la Renaissance – vitre de Dürer–).

On retrouve ici la double fonction de l'enseignement de géométrie notée à propos de la géométrie plane (technique de dessin, aspect culturel).

Conclusion Concernant la prise en charge des apprentissages liés aux modélisations de l'espace, notre étude montre que

– si à l'école élémentaire, le rapport au monde réel est bien présent, cette dimension se réduit en Sixième-Cinquième au rapport à des objets réels éventuellement fabriqués en technologie puis disparaît dans la suite ;
– les apprentissages concernant les différents modes de représentations matérielles, y compris au moyen de méthodes informatiques, sont explicitement présents jusqu'en Terminale S.

Pour ce qui est de la mise en place du paradigme de la Géométrie II, le cas de la géométrie dans l'espace présente l'intérêt de montrer comme au ralenti les différentes phases du processus analysé dans la première section (3.1.1). Jusqu'en Première S, le monde des objets épurés de GI est présent en tant que domaine de réalité étudié, fabriqué (patrons) et représenté. A partir de la Troisième et en Seconde, un second monde d'objets géométriques abstraits se met très lentement à vivre, les connaissances produites étant encore orientées vers les objets matériels et les techniques de représentations en dimension 2. En Première S, une partie du programme relève complètement pour les objets et les méthodes de la Géométrie II mais ce n'est pas totalement le cas dans cette classe pour les tâches mettant en jeu in fine les représentations d'objets épurés. En Terminale S, les objets sont clairement abstraits.

3.2 Le cas du Chili

Les analyses présentées dans ce qui suit s'appuient comme pour la France sur l'étude des documents officiels, essentiellement ici les textes qui sur le site du Mineduc suivent la présentation des programmes en présentant pour chaque unité d'enseignement de nombreux exemples d'activités destinées au travail des élèves. Nous commencerons notre étude en 6B ; cette décision est justifiée par le fait qu'à ce niveau la Géométrie I est sans contexte le paradigme en vigueur. Nous faisons l'hypothèse qu'il en est a fortiori de même dans les classes antérieures.

3.2.1 Etude de l'espace du travail géométrique : les axes de l'étude

Une caractéristique des orientations prônées par le ministère chilien est d'accorder une très grande place au travail préalable à l'institutionnalisation d'une notion ou d'un résultat. Parmi les activités suggérées, de tels travaux représentent entre un tiers et la moitié des propositions. Ce choix est clairement exprimé dans le texte suivant :

> Septimo Año Básico Orientaciones didácticas p. 51
>
> "Se pone especial énfasis en el desarrollo de procesos sistemáticos que permitan desarrollar habilidades para enfrentar una situación [...], establecer procedimientos, sistematizarlos y llegar desde conclusiones particulares a generalizaciones : es decir, conclusiones válidas para una situación general.[...] Repetidamente se propone en las actividades que los alumnos y las alumnas expresen verbalmente lo que han hecho, expliquen sus formas de proceder, fundamenten sus conclusiones y las confronten con las de otras personas."
>
> "En relación con los triángulos, en este unidad se enfatiza el dibujo. Se trata de que se llegue a una convicción respecto de cuándo es posible y cuándo no es posible construir un triángulo cualquiera. [...] (la suma de la longitud de dos lados cualesquiera debe ser mayor que la del tercero). No obstante, no se trata de enseñar esto como una verdad.

> Se propone un conjunto de actividades que conduzcan a los alumnos y alumnas a descubrir y comprender dicha condición" pp. 51-52

Ceci nous a conduits à nous intéresser particulièrement à ces activités préalables présentes à tous les niveaux de l'enseignement. Nous avons constaté que jusqu'en 3M pour la géométrie plane[10] et en 4M pour la géométrie dans l'espace, l'espace de travail des élèves dans ces situations « introductrices » intègre des objets de Géométrie I, voire d'autres objets matériels appartenant au réel quotidien que les élèves sont amenés à observer, manipuler ou mesurer.

Dès la 6B, on retrouve systématiquement dans la liste des tâches attendues des élèves pour une situation donnée les formulations suivantes :

> "Analizan la tabla y escriben algunas conclusiones" p. 97
>
> "Estudian sus características en relación a los lados y a los ángulos y escriben conclusiones." p. 98
>
> "Hacen un trabajo en el que sintetizan las conclusiones de todas las actividades." p. 98
>
> "Escriben una síntesis y acuerdan criterios de clasificación comunes."p. 101
>
> "Comparten criterios de clasificación con otros grupos e incorporan los que eventualmente no hayan considerado" p. 101

Dans ces instructions aux professeurs, la formulation et au moins dans une certaine mesure, la décontextualisation et la généralisation des résultats sont donc régulièrement à la charge des élèves[11] . Il en est de même de la validation dont les formes sont étroitement liées au paradigme géométrique. Illustrant notre étude par des exemples d'activités préparatoires issues des différents niveaux de la scolarité, nous nous intéresserons donc particulièrement aux modalités de la validation des résultats : qui valide et comment ? Toutefois, les textes étant parfois peu explicites quant à la nature des validations attendues des élèves, nous devrons pour mieux fonder nos interprétations, élargir l'étude aux activités d'application proposées.

Sexto Año Básico

L'unité 5 « Geometría » aborde deux thèmes : Figures géométriques (on y travaille en particulier sur des classifications et sur les axes de symétrie) ; Périmètre et aire (l'effet des agrandissements est une des questions traitées).

Les objets du travail dans les activités préparatoires

La géométrie se situe clairement dans GI. Le texte de présentation du programme précise :

> "Se continua el desarollo del sentido espacial, el estudio de figuras y cuerpos geométricos y el análysis de las propiedades y relaciones geométricas que se pueden observar en diversas situaciones que estan al alcance de niños y niñas (construcción, dibujo, manipulación) más que sus definiciones y clasificiones preestablecidas. Se propone, también, un intenso trabajo relacionado con medición y cálculo de áreas y perímetros de figuras planas, poniendo énfasis en los efectos que tienen en dichas magnitudes los cambios que se introducen en algunos elementos de las figuras. Por ejemplo en los lados. De este modo, las actividades se desarollan poniendo atención en familias de figuras más que en figuras aisladas." p. 9

[10] En 4M la géométrie plane se consacre à l'introduction de la notion de vecteurs. Les activités proposées sont très morcellées et apparaissent comme rompant avec la tendance antérieure.

[11] Ces activités planes se consacrent à l'introduction de la notion de vecteurs. Les activités proposées sont très morcellées et apparaissent comme rompant avec la tendance antérieure.

Toutes les activités proposées font travailler les élèves sur des objets matériels (manipulations de tangram, de géoplan - planche cloutée + élastiques -, de « figures » en papier découpé, dessins notamment sur papier quadrillé pour la détermination de l'aire, utilisation d'un miroir et de pliage pour la symétrie). Exemples :

> Travail avec des figures en papier : "Investigan las condiciones necesarias para formar determinadas figuras combinando otras, comparten sus procedimientos y conclusiones y los comparan con los de sus compañeras y compañeros." p. 97
>
> Travail avec papier découpé et pliage ou geoplan et miroir : "Investigan los ejes de simetría de diversos cuadriláteros, relacionándolos con las características de los lados y ángulos, y los clasifican según el número de ejes." p. 102

Deux de ces activités ont pour but une catégorisation des figures qui semblent plutôt viser des classes disjointes (il s'agit de repérer des différences). On s'attache avant tout à une description la plus complète possible des propriétés des différentes classes introduites sans souci de caractérisation puisqu'une propriété caractéristique vise au contraire la minimalité.

> "En las clasificaciones hay que considerar longitud de los lados y sus relaciones (pares paralelos, perpendiculares), los ángulos (rectos, no rectos, etc.)" p. 101.
>
> "Es necesario establecer permanente comparaciones entre las diferentes figuras con el fin de que identifiquen las características esenciales que hacen las diferencias." p. 102
>
> "La atención se pone, en particular, sobre los ejes de simetría y en las relaciones de éstos con otras características de las figuras. De este modo, la existencia o no de ejes de simetría se enfoca como una propriedad particular de algunos cuadriláteros pero que está intimamente relacionada con otras propiedades. Así, se parte con una sistematización y profundización de propiedades de cuadriláteros referidas a lados y ángulos, luego se incorpora una nueva propriedad (existencia o no de ejes de simetría) para, finalmente, ponerlas todas en relación, permitiendo una caracterización más acabada de cuadrados y rectángulos."p.95

Les instructions contiennent en Annexe deux pages très concrètes (dessins des instruments et de leur position) sur le dessin avec règle et équerre de deux parallèles, règle et compas de deux perpendiculaires. L'apprentissage de l'usage des instruments et de techniques de tracés associées est donc bien présente.

Toutes les activités d'évaluation (deux types d'exemples) proposées concernent des objets de GI, voire des objets réels :

> "Planifican la construcción de un objeto, realizan un plano esquemático de sus partes determinado una escala".

Les formes de la validation.

Les textes insistent sur le rôle des élèves dans la validation de leurs productions. Le mode de validation semble être l'évidence, appuyée sur un certain nombre d'expériences ou d'observations que l'on cherche à doter d'une dimension systématique :

> Orientaciones didácticas p. 95
>
> " Con el fin de que los niños y las niñas vayan estableciendo conclusiones y propiedades generales se insiste [...] en la importancia del registro sistemático de observaciones y en su análisis. En este proceso resulta esencial que [...] prueben la veracidad de sus conjeturas. "

Le texte enchaîne alors comme suit :

> " es importante que el profesor o la profesora, al acompañar el trabajo de los estudiantes, les plantee preguntas como ¿por qué crees que resultará así ? [...]¿ probaste con otros casos ? ".

Ce mode de validation, appuyé sur une expérimentation répétée mais nécessairement limitée et un consensus local entre élèves, n'est à aucun moment mis en doute. Ceci confirme que la Géométrie II est bien absente. Le professeur ne semble pas sollicité pour apporter des éléments de validation complémentaires, par référence à des savoirs sociaux validés ailleurs et autrement.

Si l'on n'excepte les catégories déterminées et le vocabulaire correspondant, les résultats établis ne sont pas mis en jeu dans des activités ultérieures où ils constitueraient en quelque sorte des axiomes locaux sur lesquels appuyer la production de nouveaux résultats[12].

Septimo Año Básico

Deux unités ont un lien avec la géométrie, l'unité 2 « Geometría : prismas, pirámides y triángulos » et l'unité 5 « Potencias en la geometría y los números » qui aborde le théorème de Pythagore.

L'unité 2 s'organise autour de la réalisation de prismes et pyramides d'une part, de l'étude des triangles d'autre part (classification des triangles, conditions vérifiées par les longueurs des côtés et des mesures d'angles, cas particuliers des triangles équilatéraux et isocèles, construction de hauteurs et de bissectrices, lien hauteur/bissectrice/axe de symétrie et formule de l'aire).

Les objets du travail dans les activités préparatoires

Les objets sur lesquels on fait travailler les élèves dans toutes les activités d'exploration sont des objets de GI ou des objets matériels : dessins, triangles construits avec des bandes de carton, avec un géoplan ou en papier découpé, patrons de solides, solides réalisés en pâte à modeler ou à partir d'autres solides. L'exemple suivant étaye particulièrement cette analyse. Il s'agit d'une activité portant sur les prismes et pyramides. La question posée est la suivante :

> " ¿ Cuál es el prisma (o pirámida) de menor altura que se puede construir con esa misma base ? ¿ Cómo sabes que es la menor ?" "Y, al contrario, ¿existe una pirámida que corresponde a la de una altura máxima ?"

Les commentaires précisent :

> "Las preguntas relativas a determinar cuál es la pirámida y el prisma de menor altura que se puede formar a partir de determinada base tienen la intención de que las niñas y niños realicen una busqueda sistemática que les permita concluir que si bien existen infinitas redes de prismas y pirámidas generadas al aumentar la longitud de la altura, no existen infinitas redes de prismas y pirámidas que se generan al diminuarla.
>
> En el caso del prismo recto, el cuerpo con menor altura podria ser aquel en el que ambas bases"casi se juntan" (altura muy cercana a cero). En el caso de la pirámida no occurre lo mismo. [...] Los cuatros triángulos que conforman los caras laterales deben tener una altura mayor que los generados por las diagonales del cuadrado (base)." p. 56

Cette déclaration sur l'existence d'un prisme de hauteur minimale et sur le nombre fini de solides que l'on peut obtenir en diminuant la hauteur [des faces] exclut que l'on soit dans GII puisqu'elle suppose un nombre fini de mesures positives possibles comprises entre deux mesures données.

Dans le prolongement de la classe précédente, l'aspect visuel de la géométrie est très développé, notamment dans des activités de classification dont on peut remarquer qu'elles

[12] Plus généralement, on ne trouve rien dans ces textes qui marque explicitement que le savoir produit et institutionnalisé dans la classe est mis en relation par l'enseignant avec un savoir social. La seule intervention explicite de ce type se situe au niveau du vocabulaire qui permet de formuler les savoirs locaux.

débouchent sur des catégories assez peu usitées en France comme celles de triangles acutangles, rectangles et obtusangles. Mais les activités conduisent également les élèves à découvrir certains résultats dont on ne sait pas cependant sous quelles formes ils sont retenus par la classe : Exemples :

> "Investigan por medio de dibujos y construcciones las condiciones de construcción de un triángulo (relativo a los ángulos y a los lados). Establecen las condiciones de existencia de un triángulo." P. 57
>
> Propriétés visées : somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire
>
> "Aumentan en una unidad o más los tres lados de un triángulo equilátero. Observan lo que ocurre con sus lados y sus ángulos. " p.63
>
> Propriété visée : " Si on maintient l'égalité des côtés, l'égalité des angles est conservée " et " Si on perd l'égalité des côtés, on perd également celle des angles ", autrement dit, au plan logique, il s'agit d'accéder à la réciproque du premier énoncé par sa contraposée.
>
> " Sabiendo que las bisectrices dimidian un ángulo, exploran cómo se puede obtener una bisectriz a través de un doblez, para observar su relación con los lados del triángulo y determinar en cuáles casos corresponden a ejes de simetría." p. 68
>
> Propriété visée : si le triangle est isocèle, la bissectrice est axe de symétrie, elle est confondue avec la hauteur ; si le triangle n'est pas isocèle, aucune de ces propriétés n'est vraie.

On aura remarqué qu'une vision dynamique des objets géométriques est mise en avant (elle était déjà présente en 6B et apparaît comme un élément important de la Géométrie I développée dans ces programmes).

Les formes de la validation

Il est attendu que les élèves établissent certains résultats, **les modes de validation auxquels ils peuvent avoir recours** ne sont pas vraiment explicités, on peut néanmoins supposer que la validation s'appuie soit sur l'évidence visuelle, **soit sur une action (pliage) soit sur une mesure** ; le seul cas où la forme de la validation est vraiment très explicite est le suivant :

> " Un procedimiento que pueden usar para comprobar que el doblez determina efectivamente una bisectriz es medir con el transportador cada ángulo generado y verificar que son iguales y que corresponden, cada uno, a la mitad del ángulo interior considerado ; o bien, trazando la bisectriz con regla y compas según lo aprendido. " p.69

Toutefois, contrairement à ce qui se passait en 6B, le texte introduit une différence très nette, du moins pour certaines activités, entre le produit du travail des élèves et le résultat institutionnalisé. Ainsi à propos du résultat concernant le lien égalité des côtés/égalité des angles dans un triangle :

> " La conclusión principal, que corresponde a una conjectura porque no es demostrada de manera general, que se espera que abordar es que la mantención de la igualdad de los ángulos en un triángulo requiere de la igualdad de sus lados. " p. 64
>
> " En ninguno de los casos señalados se hace una observación exhaustiva de todas las posibilidades. Tampoco se hacen demonstraciones generales de los fenómenos. Por esto, las conclusiones son conjecturas y no tienen el estatus de conclusiones generales. " p.64

Suite à la dernière remarque, le texte introduit une nouvelle étape de l'activité des élèves :

> " Colectivamente, sintetizan algunas conclusiones que son validadas por el profesor o la profesora. " p. 65

On retrouve à deux autres reprises (somme des angles dans le triangle p.58, formule de l'aire d'un triangle quelconque p.73) cette différenciation entre conjecture et résultat général qui confère au professeur un rôle de validation de la conclusion générale. Mais on peut observer que si le terme Démonstration est utilisé de manière négative, pour signaler ce que ne sont pas les conclusions des élèves, il n'est jamais utilisé pour nommer ce que doit faire le professeur (contrairement à l'unité 5, voir l'étude consacrée au Théorème de Pythagore).

A aucun moment le texte ne précise véritablement sur quelle base repose la validation du professeur. Elle pourrait se situer dans GI en référant (comme en physique) à une vérification socialement répétée ou bien en utilisant des raisonnements de type mécanique par exemple (cf. Clairaut). Elle pourrait aussi être strictement logico-déductive. L'exemple de la démonstration du théorème de Pythagore proposée sur le site auquel renvoient les Instructions relève plutôt de ce dernier point de vue mais certaines propriétés d'alignement sont lues sur le dessin et ne font pas l'objet de démonstrations, la seule partie « démonstrative » reposant sur l'emploi de formules de calculs (dans le cadre de l'unité étudiée, il est vraisemblable que ceci se retrouve dans l'établissement de la formule de l'aire du triangle).

Par ailleurs, d'autres résultats obtenus par les élèves ne font pas l'objet d'une validation du professeur et sont pourtant utilisés dans des exercices ultérieurs. C'est particulièrement le cas du travail autour des bissectrices et du résultat liant hauteur, bissectrice et axe de symétrie dans le triangle isocèle.

Néanmoins, il faut retenir qu'à ce niveau les textes attirent l'attention des professeurs et par là, on peut le penser, des élèves sur l'enjeu de généralité qui est celui des énoncés mathématiques et sur l'impossibilité d'établir des conclusions générales par l'examen de cas particuliers. Cette approche peut permettre de justifier le rôle du raisonnement et de la démonstration sans nécessairement sortir du paradigme GI, **les objets du travail étant dans ce cas des classes infinies d'objets matériels.** Notons que cet argument n'est pas mentionné en France.

Il se pourrait donc que le travail du professeur se déploie dans le même paradigme que celui des élèves. Cependant les résultats visés ne peuvent sous la forme où ils sont usuellement formulés dans un cours de mathématiques énoncer des propriétés relatives à des objets matériels. Cette remarque que nous allons développer ci-dessous nous amène à revenir sur les objets du travail.

Retour sur les objets du travail

Examinons en effet le cas du résultat suivant : la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°. Dans l'activité centrée sur la construction de triangles, il est prévu que les élèves :

> "Analizan los datos de la tabla para determinar por qué en algunos casos no se puede construir un triángulo y caracterizan las medidas de los ángulos de manera que sea posible formar un triángulo. Buscan relacionar las medidas de los tres ángulos y la suma de ellos en cada caso." p. 58

Or la somme des mesures des angles d'un triangle dessiné sur une feuille est influencée par les approximations dues à la construction et dues au mesurage. La somme des mesures des angles d'un triangle de GI ne peut donc être égale à 180° qu'aux erreurs de mesure près, comme le savent les physiciens ; seul un travail sur des objets de GII évite cette question des erreurs de construction ou de mesures. Ce problème n'est pas soulevé, aucune indication au professeur ne l'invite à réfléchir à la gestion des approximations.

Toutefois certaines réflexions concernant la construction d'un triangle à partir des mesures des côtés, dans le cas où l'une des mesures est somme des deux autres, permet d'avancer certaines hypothèses sur le point de vue adopté.

Le matériel envisagé pour l'étude des conditions de constructibilité consistent en des bandes de carton. Les textes signalent aux professeurs :

> "Una limitación de este material es que por tratarse de tiras de cartón que tienen un determinado ancho pueden distorsionar algunas figuras (por ejemplo, hacer créer que es posible construir un triángulo de medidas 3cm, 3cm, 6 cm). Complementariamente será importante, entonces, realizar actividades de dibujo. " p. 59

Les auteurs semblent donc croire que dans le monde du dessin aux instruments, l'inexistence d'un triangle de longueurs des côtés 3,3,6 est non problématique. Ceci n'est pas vrai puisque cette inexistence repose sur le fait que les deux cercles utilisés pour construire le troisième sommet n'ont qu'un seul point en commun, aligné avec les deux autres sommets. Or, dans GI, ce résultat ne va pas de soi ; seule une vision idéalisée du cercle peut fonder un tel résultat.

Ceci nous conduit à avancer l'hypothèse suivante :

> *Passant sous silence ou ignorant les difficultés inhérentes à l'action fût-elle instrumentée dans le monde matériel (mesurage et construction), les auteurs des programmes identifient une Géométrie I des classes de dessins aux instruments avec la Géométrie II.*

Certains éléments présents dans la suite du texte confortent cette interprétation. Ainsi, dans une tâche de reproduction de dessins, le texte signale :

> "Lo central está en que comprendan que si se copia exactamente la longitud de los trazos, los ángulos quedan determinados." p.60

Cette illusion de l'exactitude de la mesure pourrait alors expliquer l'absence de prise en compte des approximations de mesure dans l'établissement des résultats.

Dans un tel contexte, l'importance accordée aux **procédés de tracés aux instruments** prend tout son sens. Ceux-ci (report d'angle avec règle et compas, tracé de hauteur et de bissectrice, construction de triangles dans les 3 cas de caractérisation) sont clairement institutionnalisés ; une annexe les décrit avec force dessins concrets représentant les instruments eux-mêmes.

Les travaux d'application

Deux séries d'exercices consistent en des calculs d'angles ; ils nécessitent d'utiliser les hypothèses sur la nature des triangles pour calculer des angles en utilisant les résultats établis précédemment (angles à la base égaux dans un triangle isocèle, 3 angles égaux à 60° dans un triangle équilatéral, somme des angles $= 180^\circ$, hauteur $=$ bissectrice dans un triangle équilatéral) ; l'un des exercices nécessite même d'établir qu'un triangle est isocèle. On peut donc penser que les résultats considérés sont reconnus et institutionnalisés[13] dans la classe, recevant un statut de savoir au moins local. Ces savoirs permettent aux élèves de déterminer des mesures d'angles par raisonnement et calcul.

Octavo Año Básico

Le programme comporte deux unités de Géométrie, l'unité 1 est consacrée aux polygones, cercles, périmètres et aires, l'unité 5 aux volumes. Par ailleurs l'unité 2 consacrée à la proportionnalité comporte deux activités centrées sur les représentations à l'échelle.

[13] Toutefois, rien n'est dit sur la forme des énoncés par lesquels ils sont retenus : contrairement à ce qui se passe dans l'Unité 5 avec le théorème de Pythagore, la dénomination *théorème* est absente de cette unité.

Nous fondons nos analyses sur l'étude de l'unité 1 « Polígonos, circunferencias, áreas y perímetros ». Deux résultats y sont abordés : d'une part un théorème portant sur les relations entre les angles déterminés par deux droites puis par deux droites parallèles et une sécante, d'autre part les formules donnant le périmètre et l'aire du disque en fonction du rayon.

Les objets du travail dans les activités préparatoires

Comme dans les années antérieures, manipulation d'objets matériels et dessin ont une grande part dans l'activité des élèves. En particulier, à une exception près sur laquelle nous reviendrons[14] , les activités d'exploration de l'unité 1 qui visent, longuement, à faire construire et formuler par les élèves les résultats abordés dans cette unité consistent en des travaux sur des objets de GI, voire des objets matériels (travail sur des figures articulées pour l'évolution des relations angulaires sous l'effet de mouvement, travail sur le périmètre du cercle avec des disques en carton), avec des mesures aux instruments (rapporteur pour les angles, règle graduée pour les longueurs) ou par pavage (pour l'aire du disque), des vérifications par déplacement ou pliage[15].

Toutefois le travail effectué sur le périmètre et l'aire du disque fait apparaître une évolution du point de vue sur le cercle. Dans la perspective de fonder l'idécimalité de π, c'est-à-dire le fait que ce nombre n'est pas décimal, les activités invitent les professeurs à mettre en avant l'impossibilité d'obtenir une mesure exacte du périmètre et de l'aire :

> " En la primera parte de la actividad la idea es que los estudiantes recurran a procedimientos de medicíon como ubicar una cuerda por el contorno de la circunferencia y, en el caso del área, cuadricular la superficie con cuadrados de distintas medidas para ajustar el cálculo. En este segundo caso, es importante que se den cuenta que cuanto más pequeño es el cuadriculado, más exacta es la medicíon. [...].
>
> La reflexión en torno a la dificuldad para encontrar un valor exacto de la medida está centrada en darse cuenta que es una medida con cifras infinitas y aunque se vizualiza perfectamente (se ve en el trozo de cuerda) no se puede expresar a través de un número decimal, sino que representa un número irracional." (p.40)

Il ne s'agit pas de s'interroger sur les approximations inhérentes au mesurage par les instruments utilisés mais de mettre en avant l'incapacité des procédés utilisés à atteindre exactement le disque : dans le cas de l'aire, le pavage par des carrés, voire des polygones, ne peut pas coïncider avec le disque, la mesure obtenue est toujours différente de la « vraie » mesure même si le passage à des carreaux plus petits permet de diminuer l'erreur. Or ceci suppose d'avoir un point de vue idéalisé sur le cercle : quelque soit le nombre de sommets choisi, il ne coïncide jamais avec un polygone régulier parce qu'entre deux points aussi proches soient-ils, l'arc de cercle a toujours une certaine courbure. Et c'est bien à un passage à l'infini qu'invite l'unité 7 : après avoir fait établir à partir de la formule connue de l'aire du triangle que pour un polygone régulier l'aire est la moitié du produit du périmètre par la distance du centre aux côtés, l'activité conduit les élèves à passer à la limite (de manière non formalisée bien sûr).

> "Si la circunferencia, como ya se habia visto, puede ser un polígono de infinitos lados, imaginen y tracen un dibujo esquemático de una circunferencia descompuesta a partir de su centro en triángulos muy pequeños, todos de igual forma y tamaño." p. 43

[14] Il s'agit de l'activité 7 consacrée à la relation aire = $\frac{1}{2}$.périmètre.rayon qui permet d'établir la formule de l'aire.

[15] Signalons qu'on retrouve comme en 7B une façon de traiter la réciproque d'un théorème (ici si des droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles correspondants sont égaux) en envisageant de manière dynamique la contraposée.

> Comentario " En la segunda parte de la actividad, en la cual se relaciona el área del circulo con la de cualquier polígono regular, es muy importante que realicen el dibujo esquemático que se pide y visualicen que el radio del la circunferencia corresponde a la altura de estos infinitos y angostros triángulos." p. 44

On voit dans cet extrait que le dessin réalisé n'est plus l'objet du travail, il en est une représentation.

Les activités sur le cercle sont donc à ce niveau l'occasion d'une évolution quant à la nature des objets étudiés en géométrie mais ce point reste implicite, aucun commentaire n'attire l'attention des professeurs sur ce glissement ; on peut au contraire douter que les auteurs des textes soient véritablement conscients de l'ampleur du changement en jeu. En effet, l'Activité 3 consacrée aux polygones se termine par les questions suivantes :

> " Imaginan que formas van tomando los polígonos regulares de una mayor cantidad de lados. Llegarán momento en el cuál aparezca una circunferencia ? Por qué ?"
>
> Comentario : Construir los polígonos regulares con un programa geométrico como el Cabri o Geómetra permite visualizar claramente el efecto de aumentar los lados y su cercania con la circunferencia."

Quelle est finalement la réponse attendue des élèves ? Le texte n'en dit rien. Il y a vraiment un très grand doute sur ce sujet car prôner le recours à un logiciel encourage plutôt une réponse positive à la question de l'apparition du cercle[16]. Une réponse négative suppose un point de vue mental sur les tracés. Une telle activité pourrait donc être l'occasion d'une discussion sur le caractère idéal du cercle mais les textes n'attirent pas l'attention des professeurs sur ce point délicat et crucial.

Les formes de la validation

Concernant le travail sur les angles, il est difficile de savoir exactement ce qui est attendu des élèves dans les activités exploratrices. Les premières activités reposent sur des mesures et conduisent cependant à des conclusions générales, il n'y est pas fait mention de raisonnement. Mais la dernière activité préalable à la formulation du théorème contient la consigne explicite de recourir à des déplacements des dessins ou à des mesures pour expliquer les résultats :

> "Para la explicación recurren al desplazamiento de las figuras y a la medida de los ángulos" p. 27

Elle est accompagnée du commentaire suivant :

> Comentario : "Las conclusiones que se obtienen respecto a la relación entre los ángulos, a través de las mediciones realizadas, también se pueden verificar por medio de desplazamiento de rectas y rotaciones de ángulos. Es importante destacar que cuando el razonamiento permite establecer claramente la relación entre ángulos no es necesario medir. " p. 27

De fait, la plupart des relations peuvent être justifiées par raisonnement à partir de deux résultats seulement, la somme des angles adjacents déterminés par deux droites et l'égalité des angles correspondants dans la configuration de deux droites parallèles et d'une sécante. Mais la formulation du commentaire cité ci-dessus soulève une interrogation sur ce qui est considéré comme raisonnement : ne doit-on pas considérer comme un raisonnement une argumentation dynamique faisant référence à des déplacements ?

Il semblerait qu'il y ait une certaine relégation de la mesure et de la manipulation comme outils de preuve par les élèves, le raisonnement, éventuellement appuyé sur des

[16] Si on augmente vraiment beaucoup le nombre de sommets du polygone, dans le contexte d'un dessin ou dans Cabri (ce qui est alors très facile), on ne fait plus visuellement la différence entre cercle et polygone.

considérations dynamiques, étant préféré quand il est possible. Mais cette position n'est l'objet d'aucune tentative de justification et elle est finalement d'autant moins justifiée que contrairement à ce que nous avons vu en 7B, le texte ne fait à aucun moment la différence entre conjecture et conclusion générale. L'enseignant ne semble plus avoir de rôle particulier quant à la validation des théorèmes[17], même dans les cas où le travail des élèves repose sur des vérifications par mesurage dans un nombre nécessairement fini de cas. Au contraire, les activités des élèves se terminent par des consignes du type :

> "Establecen conclusiones generales en relación con las medidas de los ángulos suplementarios adyacentes." p.23.

Rien ne dit dans les commentaires que l'enseignant devra démontrer au moins une partie des résultats.

Le travail sur le cercle est aussi l'occasion d'une certaine prise de distance vis à vis du mesurage avec l'apparition de deux grandeurs dont la mesure est inaccessible aux instruments existants, non par imprécision de l'acte de mesurer mais par nature de l'objet géométrique. La formule du périmètre est considérée comme établie par les élèves à partir d'un travail expérimental portant sur un nombre très faible de cas (mesurage du périmètre de 6 roues, calcul des quotients $\frac{p}{r}$) ; les commentaires ignorant l'absence de généralité, insistent sur l'impossibilité d'obtenir une valeur exacte du quotient du fait de sa nature i-décimale.

Signalons pour finir que les évolutions vers une vision plus idéalisée de certains objets et conjointement une minimisation du rôle du mesurage ne se retrouvent pas dans les deux activités consacrées dans l'unité 2 aux représentations à l'échelle qui se situent vraiment au niveau d'une Géométrie I de la manipulation et de l'observation : critère de similitude de rectangles reposant sur le déplacement et la vérification visuelle de superposition, construction et utilisation du pantographe. Cette partie ne prend aucune précaution avec le statut des affirmations, même au niveau de l'enseignant : plusieurs propriétés sont affirmées sans effort de justification ou en prenant appui sur une prétendue évidence visuelle fort contestable.

Les travaux d'application

Les activités proposées aux élèves pour faire fonctionner le théorème sur les relations angulaires relèvent exclusivement d'un travail de type « production de démonstration ». On peut noter que les situations proposées (cf. p. 32) sont toujours d'un certain niveau de complexité (question ouverte, nécessité pour les élèves d'introduire plusieurs pas de raisonnement, figure complexe dont il faut extraire des sous-figures), voire sont intégrées dans des situations de recherche. Mais tous les exercices sauf un visent à déterminer des mesures d'angles. Le seul énoncé qui fait exception demande de décider si une figure contient des droites parallèles et de justifier la réponse avec les précisions suivantes :

> "Para justificar la respuesta usan lenguaje claro, preciso y se basan en las relaciones entre los ángulos y las medidas entregadas. No miden los ángulos con transportador." p. 32

Dans un cas, il faut montrer que deux droites qui semblent « vaguement parallèles » ne le sont pas en utilisant que la somme de deux angles fait 185° et non 180° (contraposée de la propriété directe) ; dans l'autre cas, il faut montrer le parallélisme c'est-à-dire utiliser cette fois la réciproque.

[17]Par contre, il est fait mention de la possibilité qu'il démontre le résultat concernant la somme des angles d'un triangle vu en 7B (p.32).

Il y a au niveau de ces instructions un saut (déjà amorcé à propos des triangles en 7B) : on attend véritablement des élèves qu'ils calculent des mesures d'angles en utilisant des hypothèses (dans ces énoncés apparaît le terme « Datos » (données) non rencontré en 7B) et des théorèmes (le terme est cette fois utilisé) ; on demande même réciproquement l'établissement d'une propriété géométrique. **Le mesurage aux instruments est placé hors jeu dans ces exercices.**

De même, les formules de l'aire et du périmètre du disque sont utilisées dans des exercices de calcul portant sur des configurations complexes.

Primer Año Medio

Cette année comprend deux unités de géométrie. L'unité 3 est consacrée aux transformations isométriques (symétrie, translation, rotation), l'unité 7 à la congruence de figures planes.

De même qu'en 8B, les deux unités doivent être différenciées.

Dans l'unité 3, le travail, étroitement lié à des considérations artistiques, se situe nettement dans GI : on travaille sur des objets matériels, les propriétés (notamment de conservation) sont observées sur un ou quelques exemples.

Exemple de consigne :

> "Para inducir las caracteristicas de la simetría, los estudiantes dibujan una recta junto a una figura simple. Recurren a formas para dibujar la simétrica de esa figura, considerando la recta como eje de simetría ; podrán doblar el papel, calcar a contraluz, etc.
>
> Posteriormente se pide dibujar por simetría la imagen de una figura [...] sin calcarla, sino que utilizando regla, escuadra, compás y transportador." p. 48

Il n'est pas évident que de véritables définitions de ces transformations soient recherchées, encore moins institutionnalisées. Celles qui sont formulées sont repérées par observations isolées.

Cette approche basée sur les manipulations et les constructions s'étend à toutes les activités de cette unité ainsi qu'à l'évaluation. Le point de vue adopté dans l'unité 7 "Congruencia de figuras planas" est bien différent.

Les objets du travail dans les activités préparatoires

Les critères de congruences des triangles ainsi qu'une classification des triangles et quadrilatères suivant les axes et centre de symétrie sont les résultats mathématiques visés.

Pour la première fois la notion de condition nécessaire et suffisante apparaît dans les textes :

> Aprendizajes esperados p.87
>
> 1. "Analizan los datos **necesarios y suficientes** par construir un triángulo y lo relacionan con los criterios de congruencia de triángulos."

A cet objectif est associée une activité. Elle se présente de la façon suivante :

> "Analizar distintas figuras geométricas para encontrar **las condiciones necesarias y suficientes** que las determinan. Relacionar esas condiciones con criterios de congruencia. Establecer los criterios de congruencia par los triángulos."
>
> Ejemplo A :
>
> Considerar algunas de las siguientes figuras geométricas [sont donnés un carré, un rectangle, un losange et un cercle]. Suponer que se necesita comunicar a otro, por teléfono, las formas y dimensiones de estas figuras para que las dibuje. Cuáles datos daría ? **Reducir el número de datos al mínimo posible.** [...]

> Al término de la actividad abrir un debate acerca de la información mínima necesaria par hacer el dibujo que se pide.
>
> Ejemplo B : Este ejemplo es similar al anterior, restringido a un triángulo escaleno.
>
> Cada grupo debe encontrar al menos dos formas de realizar esta communicación.
>
> Al término de la actividad, se abre un debate para establecer las conclusiones sobre las condiciones para la construcción de triángulos y formular los criterios de congruencia de triángulos." p. 88

Ce travail de caractérisation des quadrilatères se poursuit autour des symétries avec une attention nouvelle pour **l'inclusion des catégories de quadrilatères :**

> Actividad 2 Ejemplo B p. 93
>
> "Categorizar diversos tipos de cuadriláteros considerando la cantidad de ejes de simetria que es posible trazar en cada uno. Desde este perspectiva, comparar al menos el cuadrado, el rombo y el rectángulo.
>
> Indicaciones al docente :
>
> Sería interesante que llegaran a construir categorias **incluyentes** ; constatar que desde estas categorias el cuadrado es un rectángulo y también un rombo."

On voit donc apparaître une approche des objets plus proche de celle qui est en vigueur en Géométrie II que celle qui est présentée en Básica. Ceci étant noté, il faut dire que les caractérisations de classes d'objets peuvent s'appliquer à des dessins et rester dans GI.

Les formes de la validation

Dans les deux activités préparatoires aux résultats mathématiques en jeu dans cette unité, la responsabilité de formuler et valider les résultats semble dévolue aux élèves (cf. par exemple, l'activité citée sur les critères de congruence des triangles). Sur quels critères ce travail de validation dont on notera la dimension sociale repose-t-il ? Cette unité fait explicitement entrer la démonstration dans le topos de l'élève :

> p. 87 Contenidos
>
> "**Demostración** de propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, relacionadas con congruencia. "
>
> Aprendizajes esperados
>
> 4 "Conjeturan y **demuestran** propiedades en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, por medio de congruencia de triángulos. "

Mais la déclaration suivante, présente dans l'introduction de cette unité laisse planer un doute certain sur ce qui est vraiment entendu par le terme Démontrer :

> p. 86 Orientaciones didácticas.
>
> "Generalmente el aprendizaje de la geometría se valora como iniciación al pensamiento formal ; a este argumento es necesario agregar que también es importante como una fuente de intuiciones ; permite aproximaciones **a través de pruebas non formales, no axiomatizadas, como dibujos y plegados de papel."**
>
> **Esta ùltima perspectiva es la que interesa explorar en este programa ; que los estudiantes puedan argumentar y fundamentar sus conclusiones en hechos y/o cadenas de afirmaciones coherentes.** Las demostraciones no formales no deberían ser consideradas como errores o deficiencias, sino como una etapa inicial de un proceso hacia las demostraciones más formales. "

On peut se demander si l'essentiel n'est pas que les élèves produisent un enchaînement cohérent et probant d'arguments, les uns relevant d'un savoir (ici par exemple les critères de congruences des triangles), les autres pouvant recourir à des manipulations, dessins, pliages. Dans ce contexte, les objets étudiés sont nécessairement des objets de GI, au mieux des classes d'objets.

Les travaux d'application

Le point de vue sur la validation n'est pas cantonné aux activités introductrices. Ainsi on peut lire les éléments suivants dans les indications aux enseignants consacrées aux activités associées à la résolution de problèmes mettant en jeu la congruence :

> p.92 Ejemplo A
>
> "Doblar una hoja de papel de forma irregular, dos veces, de modo de generar un ángulo recto como lo indice el dibujo. Cualquier corte que pase por ambos dobleces genera un rombo al extender el papel. Por qué ?
>
> Indicaciones al docente :
>
> El doblado y corte de **papel es una herramienta de trabajo que puede complementar y apoyar el aprendizaje de geometría**, el análisis de propiedades y **la resolución de problemas.** "
>
> p. 93 Ejemplo D :
>
> "Demostrar que si en una circunferencia dos cuerdas estan a la misma distancia del centro, tienen la misma longitud.
>
> Indicaciones al docente :
>
> **Es necesario que los estudiantes manipulen figuras, las doblen, recorten, etc.** Para muchos este tipo de actividad les abre las posibilidades de entender y encontrarle sentido a las demonstraciones. "

Les activités d'évaluation adoptent la même approche.

Il semble que, dans cette unité, l'attention soit au moins autant centrée sur le développement d'une activité de recherche que sur la démonstration elle-même. Les exercices d'évaluation confirment cette tendance. Si l'on excepte un exemple consacré à la démonstration du Théorème de Pythagore, tous les autres exemples sont des problèmes ouverts ou, si la consigne est « Démontrer que », non guidés. En voici deux exemples :

> "Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera. ¿Qué condiciones debe cumplir para obtener triángulaos congruentes al trazar los diagonales ?" p. 92
>
> "Demostrar que si por el punto medio de la diagonal de un rectángulo se traza una perpendicular a ésta, se divide el rectángulo en dos trapecios congruentes." p. 93

Segundo Año Medio

Cette année comprend deux unités de géométrie. L'unité 2 est consacrée aux figures semblables, les résultats cités sont les critères de similitudes des triangles et le théorème de Thalès. L'unité 4 porte sur le cercle et les angles avec le théorème de l'angle au centre. Par ailleurs, dans le cadre de l'étude des fonctions, on aborde les équations de droites (coefficient directeur, ordonnée à l'origine, condition de parallélisme et d'orthogonalité) ; dans ce cadre, la résolution de systèmes de 2 équations à deux inconnues est interprétée graphiquement ; cette partie comprend aussi des éléments historiques mettant l'accent sur la contribution de Descartes au développement des relations entre algèbre et géométrie.

Nous avons centré notre étude sur l'unité 2.

Les objets du travail dans les activités préparatoires

La plupart des concepts et résultats en jeu dans cette unité sont l'objet d'un gros travail préparatoire sous forme de plusieurs activités proposées aux élèves. On notera toutefois que ce n'est pas le cas du Théorème de Thalès.

L'activité 1 (p. 39) proposent plusieurs exemples relevant de pratiques sociales concernant l'agrandissement/réduction (travail sur les cartes géographiques, sur des plans, maquettes et photographies). L'intention affichée est que :

> "Los alumnos y alumnas **se familiarecen** con el fenómeno de la ampliación y la reducción de figuras y cuerpos ; que **visualisen** que se mantiene la forma y que el cambio en las medidas de longitud se rige por una escala..."
>
> Cette familiarisation se poursuit dans l'activité 2 (p. 40) par des tracés de figures semblables (pantographe, puzzle, effets de l'homothétie) avec notamment la perspective que les élèves :
>
> "Establecen las invariantes asociadas a la semejanza de figuras planas."

Le travail est donc à ce niveau d'exploration dans GI.

Pour ce qui concerne les critères de similitude, la première situation proposée dans l'activité 5 semble viser la formulation des critères par les élèves eux-mêmes :

> Actividad 5, Ejemplo A (p.48)
>
> "Organizar un juego de comunicación, considerando un triángulo escaleno como el siguiente. " [dessin fourni]
>
> "Cuál es el minimo de información que una persona necesita conocer para construir otro triángulo semejante con el dibujo ? **Establecen los teoremas de semejanza para cualquier triángulo...**"

Les élèves sont donc supposés établir les critères de similitude.

Les formes de la validation

Dans les deux unités de géométrie, la liste des contenus et apprentissages attendus contient des références explicites à la démonstration :

> Contenidos : Unidad 2 (p.36) et 4 (p. 76)
>
> "Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos."
>
> Aprendizajes esperados
>
> p.37 Unidad 2
>
> 4. "Conjeturan y demuestran propiedades geométricas asociadas a la proporcionalidad de trazos y a la semejanza de figuras planas, distiguiendo entre hipótesis y tesis. "

Il semble donc qu'il y ait cette fois un saut qualitatif quant à la nature des raisonnements de validation attendus des élèves avec accès à la démonstration mathématique.

Les orientations générales de l'unité 2 précisent :

> "Las figuras semejantes presentan **un nivel de evidencia a simple vista** ; la dificultad reside en el análisis de las condiciones que generan aquello que es visible y tangible. [...] Es **el paso de los ejemplos a la generalización,** lo que no es un tema menor para el aprendizaje, y a su vez es uno de los importante aportes que derivan de un aprendizaje de calidad en matemática." p.38

Ainsi cette année 2M voit revenir une attention explicite à la différence exemples/conclusions générales mais les objets d'étude semblent toujours être des classes de dessins de GI (voir ci-dessus l'allusion à l'évidence visuelle). Dans ces conditions, on peut penser que le travail consacré aux critères de similitude évoqué plus haut doit se clore par une démonstration à la charge des élèves (une telle démonstration est envisageable à partir du théorème de Thalès et les critères d'isométrie vus en 1M). Toutefois les textes ne sont pas explicites sur ce point.

Les travaux d'application

Nous nous contenterons ici d'examiner les activités d'évaluation, on se reportera à la partie consacrée aux triangles de même forme pour plus de détails. Les commentaires associés à ces activités d'évaluation nous permettent de trouver une confirmation du changement dans les attentes évoqué ci-dessus.

Trois activités sont proposées. La première demande d'agrandir de fait le dessin d'une étoile (proportion 17/6,8 donc décimal) ; il s'agit d'un travail dans GI et l'intérêt de l'évaluateur porte sur les procédés utilisés et sur la clarté des explications apportées relativement aux raisons d'emploi des procédures choisies.

Par contre, les deux autres activités qui concernent la résolution de problèmes et l'application des théorèmes (Thalès et critères de similitudes) dans des démonstrations proposent 7 exercices dont 6 attendent des démonstrations.

Parmi les critères d'évaluation, on trouve :

"Observar si

> Distinguen los datos y lo que se quiere demostrar
> Organizan las afirmaciones para llegar a demostrar lo que se pide
> Si el dibujo los impulsa a plantear conclusiones no razonadas."

On voit donc clairement apparaître une mise à l'écart de la lecture de propriétés sur le dessin, la centration sur les hypothèses et la recherche de démonstration au sens formel du terme.

Notons toutefois que cette orientation se heurte à certaines contradictions. Pour le théorème de Thalès, il est précisé dans l'activité 3 (p.43) que les élèves doivent connaître et pouvoir comprendre une démonstration du théorème de Thalès, la formulation laisse à penser que cette démonstration est donnée par le professeur. Mais les textes officiels ne précisent rien sur la démonstration en question qui peut être une question délicate comme le montre l'analyse de plusieurs manuels chiliens. Certains adoptent la démonstration générale proposée par Euclide à partir des aires. D'autres s'en tiennent à une approche partielle, uniquement efficace à ce niveau de la scolarité pour les rapports rationnels en prenant appui sur le cas de parallèles équidistantes. Le manuel Arrayan par exemple choisit cette approche mais, en l'absence du théorème des milieux, la démarche proposée relève plutôt des manières de faire des années antérieures : les élèves doivent vérifier sur quelques exemples la proportionnalité par mesurage des longueurs ; le résultat est validé et généralisé sans autre précaution. Or, contrairement au point de vue français, il n'y a pas de statut de théorème admis. Ceci entraîne une véritable incohérence entre les tâches du topos de l'élève qui exigent une démonstration et celles du topos du professeur où mesures et généralisation sont permises.

Tercer Año Medio

Nous analysons ici le programme commun à tous les élèves. Cette année comporte 4 unités dont une de géométrie.

L'unité *Las funciones cuadráticas y raíz cuadrada* s'appuie sur des activités centrées sur aires et volumes pour faire travailler sur les racines carrées et cubiques. Par ailleurs, elle propose une activité centrée sur la définition géométrique de la parabole comme lieu : 3 approches sont abordées, il s'agit dans tous les cas d'activités de tracé de l'ensemble des points équidistants d'un point et d'une droite, soit par ordinateur soit à la main. Un procédé matériel avec équerre et ficelle est montré. Aucun raisonnement n'est attendu.

L'unité de géométrie s'intitule *Más sobre los triángulos rectángulos.* Les résultats présentés sont d'une part l'invariance des rapports de côtés dans des triangles rectangles semblables, ce qui permet d'introduire les fonctions trigonométriques dans le triangle rectangle, d'autre part deux théorèmes, désignés comme les théorèmes d'Euclide (il s'agit des relations entre longueurs liées à la décomposition d'un triangle rectangle en deux triangles qui lui sont semblables par la hauteur relative à l'hypoténuse). Sinus, cosinus et tangente sont étendues au cercle unitaire. Figurent enfin parmi les contenus visés des commentaires historiques sur les nombres irrationnels, les triplets pythagoriciens et le théorème de Fermat-Wiles. Nous analysons plus précisément cette unité.

Les objets du travail dans les activités préparatoires

L'activité 1 et l'Exemple A de l'activité 5 sont des activités d'exploration des théorèmes aux programmes. Pour la première d'entre elle, la consigne est la suivante :

> "Analizan la semejanza en triángulos rectángulos y especifican los teoremas estudiados en 2M ; establecen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, para los ángulos de triángulos rectángulos . " p. 79

Les élèves ont vu en 2M les théorèmes qu'il suffit en principe d'appliquer ici dans un cas particulier, les résultats cherchés découlant par permutation des extrêmes et des moyens dans les rapports. Mais il est intéressant de noter le conseil suivant donné au professeur :

> "Interesa que los alumnos se den cuenta de que la igualdad de medida de un ángulo de un triángulo rectángulo especifica familias de triángulos que son semejantes entre sí.
>
> **Al superponerlos,** de modo que uno de los ángulos coincida, se genera paralelismo entre los terceros lados como lo indica el dibujo. [Suit un dessin représentant une famille de 5 triangles rectangles semblables, de couleur différente, qui d'abord décalés sont ensuite emboîtés].
>
> Se puede organizar el curso de modo que cada participante de un grupo de trabajo se ocupe de los calculos de uno de los triángulos, comparen los resultados que obtienen **y hagan las aproximaciones pertinentes."** p . 79

Il semble donc qu'on conseille au professeur d'organiser un travail sur figures découpées permettant des manipulations et des mesurages. On peut comprendre que les élèves sont supposés calculer les rapports de mesures pour les différents triangles dans le but de les comparer. Pour la première fois dans les textes que nous avons étudiés est évoquée, quoique de manière plutôt sibylline, la question des approximations : est-ce que l'idée d'approximations pertinentes suggère que les élèves vont négliger les écarts entre les valeurs obtenues ? Avec quel type d'argument ? L'illusion de l'exactitude dans le monde des dessins aux instruments serait donc pour la première fois mise en cause, à moins que l'argumentation ne réfère à l'idée de mesure irrationnelle comme on le verra un peu plus loin (activité 2).

Cette évolution est fugitive puisque l'exemple C demande aux élèves de réaliser sur papier quadrillé ou millimétré des triangles rectangles dont le rapport des mesures des côtés de l'angle droit est constant puis de mesurer au rapporteur les angles. L'enjeu annoncé est le suivant :

> "Interesa que los estudiantes se den cuenta de que una misma razón entre las medidas de los lados determina la misma medida para el ángulo agudo." p. 80

Pas d'interrogation donc ici sur les approximations de mesure. De nouveau les élèves possèdent déjà les théorèmes nécessaires à la démonstration du résultat visé. Mais il n'est dans aucune de ces deux tâches question de démonstration. On peut faire l'hypothèse que le travail avec triangles découpés et mesures sur dessins, donc dans GI, est utilisé pour donner du sens et convaincre les élèves.

L'activité d'exploration consacrée aux théorèmes d'Euclide est assez proche des deux précédentes et confirme l'interprétation ci-dessus. La consigne est la suivante :

> Ejemplo A p. 87
>
> "Dibujar triángulos rectángulos, trazar la altura desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa. Demostrar la semejanza entre los tres triángulos rectángulos e identificar las proporciones que definen los dos teoremas de Euclides."

Il s'agit donc ici a priori de faire démontrer les théorèmes visés par les élèves. Mais les indications au professeur précisent :

> pp.87-88 "Si se considera necesario, se pueden **recortar** dos triángulos rectángulos. En uno de ellos trazar la altura desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa y **recortar** los triángulos que se forman .
>
> I Constatar **empiricamente** la semejanza entre los tres triángulos superponiéndolos.
>
> II Contrastar esta constatacion con la demostracion de la semejanza. "
>
> III. Plantear proporciones entre los lados de los tres triángulos a partir de la semejanza establecida."

Les textes semblent donc avoir le souci d'associer des objets de GI, voire des objets en papier, aux résultats ou aux notions mathématiques introduits. On retrouve cette option dans l'activité 2 centrée sur l'extension des fonctions trigonométriques au cercle unitaire. L'exemple 2 fait construire avec un vase cylindrique et une ficelle des points de la courbe représentative du sinus dans un repère dont l'axe des abscisses représente les longueurs x des arcs de cercle. Ainsi l'enroulement de la " droite des réels " autour du cercle unitaire évoqué seulement en France est effectivement réalisé, il en est de même de son report sur l'axe des abscisses du repère. Le travail se poursuit par une construction point par point à partir des valeurs données par la calculatrice qui donne lieu à la remarque suivante :

> "Es recomendable aclarar que estos valores para la función seno y para las otras funciones trigonométricas son, generalmenten, números irracionales ; la calculadora ofrece aproximaciones de ellos." P. 82

Il y a un certain écart entre le point de vue matériel de l'exemple précédent et de toutes les activités de mesurage et cette référence à l'irrationnalité de certaines mesures qui est l'un des thèmes mis en avant dans cette unité :

> Orientaciones didácticas (p.78)
>
> "Estos teoremas [Teoremas de Euclides y de Pitágoras], ponen de relieve el interesante tema de los números irracionales ; en el desarrollo de esta unidad se propone la construcción de longitudes relativas de algunas raíces, como aplicación de estos teoremas. "

Nous avions vu que ce problème apparu à propos de l'aire et du périmètre du cercle en 7B n'était pas vraiment traité, il ne l'est pas plus ici. Nous constatons que les textes ne reviennent à aucun moment sur l'histoire des nombres irrationnels, se contentant sans aucune problématisation de faire construire les racines carrées de 2, 3 et 6 (p.88).

Les formes de la validation

Parmi les apprentissages attendus figurent les deux items suivants :

> "Los alumnos y alumnas
>
> Conjeturan sobre propiedades geométricas en triángulos rectángulos semejantes, las demuestran utilizando diversos recursos argumentativos.
>
> Reconocen el sentido y la necesecidad de la demostración en matemática y, en particular, conocen la historia del Teorema de Fermat-Wiles y los trios pitagóricos." p. 77

Les orientations didactiques précisent à propos des théorèmes d'Euclide et de Pythagore que cette unité est l'occasion de proposer des démonstrations de ces théorèmes :

> "algunas muy próximas a la intuición y otras más formales, pero todas con rigor y válidas en la matemática escolar. "p.78

Pour le théorème de Pythagore, trois démonstrations sont abordées, la dernière étant une application du Théorème d'Euclide. Mais les deux autres recourent à des aires. Dans chaque cas, il semble que des propriétés géométriques soient lues sur le dessin (certains segments sont dans le prolongement l'un de l'autre, certains quadrilatères sont des carrés) ; ce qu'il reste à faire est un calcul algébrique. On retrouve dans le deuxième exemple le souci rencontré précédemment de convaincre les élèves par manipulation :

> "Este dibujo se puede recortar y hacer con él un puzzle ; que los estudiantes constaten que el área de dos de estos triángulos es igual a ab y que el área del cuadrado es igual c^2, o bien $a^2 + b^2$." p.90

En résumé, les travaux semblent s'organiser suivant le modèle suivant (cf ci-dessus le cas des théorèmes d'Euclide) : donner du sens au théorème par un travail dans GI qui fournit un premier niveau de preuve puis établir le résultat à partir du corpus des résultats déjà institutionnalisés. Le fait que cette deuxième preuve corresponde à un changement d'objets n'est pas explicité dans les activités sur les théorèmes géométriques. En revanche, dans le cadre du travail documentaire sur la conjecture de Fermat et l'histoire de sa démonstration qui prolonge les activités sur le théorème de Pythagore et les triplets pythagoriciens, on rencontre la remarque suivante :

> "Es importante que los alumnos y alumnas intenten encontrar contraejemplos (para n=3 por ejemplo) y que **perciban que podrian continuar con casos particulares, valorando a sí la demostración."** p. 91

C'est donc à nouveau la nécessité d'établir des résultats pour une classe infinie d'objets qui est mise en avant pour justifier le recours à la démonstration comme outil de validation en mathématique.

Les travaux d'application

Outre la démonstration du Théorème de Pythagore grâce au théorème d'Euclide, deux exercices seulement demandent la démonstration de résultats géométriques généraux à partir des résultats de l'unité ; un exercice utilise la tangente pour donner l'équation d'une droite.

Les cinq autres énoncés à contexte géométrique mettent en jeu des mesures numériques. Le premier consiste à construire des triangles rectangles connaissant le sinus (ou le cosinus ou la tangente) d'un de ses angles aigus (p. 83) ; la méthode suggérée semble être de déterminer la mesure des côtés à partir de l'une d'entre elles fixée arbitrairement ; si le texte invite le professeur à insister sur la nécessité et l'importance de l'approximation dans tous les cas où est en jeu une calculatrice, on ne voit aucune différence entre un triangle idéel (dont les mesures exactes ne seraient qu'approchées par les décimaux obtenus à la calculatrice) et le triangle réalisé aux instruments. Trois exercices visent à calculer des mesures de grandeurs inaccessibles dans des situations concrètes (pp.84-86). L'un d'entre eux (détermination par deux visées d'une hauteur) suggère une réflexion sur l'effet de l'arrondi dans les calculs intermédiaires dans le cas où les deux angles sont très proches[18] ; par contre, bien que la détermination des mesures des deux angles par les élèves grâce à un goniomètre artisanal soit proposée, la question des erreurs de mesure est passée sous silence. On est donc toujours dans l'illusion de l'exactitude des mesures mesurées, c'est l'irrationnalité et les approximations de calcul qui sont mises en avant comme causes d'erreurs.

Le dernier exercice, évoqué plus haut, concerne la construction de racines carrées et ne donne lieu à aucun commentaire sur la distinction figure-dessin, exact-approché.

[18]Si a et a' sont les mesures obtenues par visées, le calcul de la hauteur conduit à diviser par tan(a)-tan(a').

Formación Diferenciada

Le programme de cette option comprend 3 unités. La première vise à développer le langage algébrique de façon à ce que :

> " los alumnos y alumnas tengan claras distinciones sobre los casos particulares y la generalización ; que adquieran habilidades para llegar a la expresión general a partir del análisis de casos particulares y que dispongan de herramientas básicas para desarrollar estas demostraciones." p. 3

On retrouve l'intérêt pour la distinction cas particuliers/généralisation et son lien avec la démonstration (en contexte algébrique) déjà rencontré. L'unité 2 porte sur les lieux géométriques, en particulier les coniques, dans un contexte exclusivement analytique. Nous retiendrons seulement deux aspects. D'une part, l'importance constante accordée à la réalisation de représentations graphiques des courbes données par leurs équations. D'autre part, l'absence totale de précautions relativement à la structure logique des raisonnements, pourtant cruciale dans les questions de détermination de lieux géométriques. Un exemple illustrera cette affirmation :

Actividad 2 Ejemplo A : il s'agit de déterminer l'équation de l'ensemble des points équidistants de deux points A et B.

> "Otros [alumnos] podrán buscar al ecuación considerando el problema resuelto : si un punto P de coordenadas (x,y) pertenece a la simetral, entonces equidista de los puntos A y B ; escribiendo analíticamente esta propriedad se determina la ecuación de la simetral."p.45

On aura remarqué l'absence de la condition nécessaire et suffisante indispensable ici.

Cuarto Año Medio

Nous commençons par analyser le programme commun à tous les élèves.

Le texte de présentation n'aborde pas spécifiquement la géométrie.

Cette année comporte trois unités dont une de géométrie. Dans cette unité sont abordés les contenus suivants : droites et plans de l'espace avec étude des problèmes d'intersection, notion de plans parallèles et perpendiculaires, coordonnées cartésiennes dans l'espace, opérations élémentaires sur les vecteurs dans le plan et dans l'espace en liaison avec translations et homothéties. Par ailleurs des problèmes doivent conduire les élèves à déterminer l'aire et le volume de solides engendrés par rotation ou translation de figures planes ou à étudier des questions de relations entre solides, par exemple un solide inscrit dans un autre. Les activités proposées ne traitent pas l'ensemble de ces points, laissant essentiellement de côté les problèmes d'intersection dans l'espace.

L'activité 1 est consacrée aux vecteurs du plan : huit exercices sur 10 sont des exercices de tracés dans un repère, les deux autres sont des calculs sur les coordonnées. L'activité 2 aborde l'espace. Il est plusieurs fois conseillé au professeur d'avoir recours à des représentations matérielles, par exemple :

> "Se sugiere al profesor o profesora que utilice medios físicos para que los estudiantes pueden visualizar estos puntos en el espacio y establecer la relación con su ubicación en cualquiera de los ochos octantes en que se divide el espacio." p. 77

Suivent des indications précises utilisant les murs de la classe, une équerre pour situer un point à partir de ses coordonnées.

Ceci étant, cinq des six exercices sont des calculs sur les coordonnées.

Les activités 3 et 4 concernent les représentation paramétriques des droites et des plans puis les équations cartésiennes de plans (on insiste à nouveau sur le besoin qu'ont certains élèves de disposer d'un modèle physique qui les aident à voir la colinéarité des vecteurs correspondant à une représentation paramétrique donnée). Dans tous les cas, le fait qu'il s'agisse de conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance est totalement passé sous silence et les exemples de raisonnement fournis confirment qu'on accepte des implications simples là où il faudrait des équivalences.

L'unité se termine par des exercices consacrés à des solides obtenus par translation ou rotation. De nouveau, les professeurs sont invités à à recourir à des moyens matériels pour aider les élèves à se forger des représentations :

> "Es necesario que los alumnos y alumnas imaginen la rotación del rectángulo y puedan vizualizar el cuerpo que se genera. Puede ser necesario apoyar esta visualización con material concreto. [...] También es posible generar el movimiento sobre un rectángulo u otra figura a partir de una construcción artesanal con una plataforma que gira por la acción de un pequeño motor ; un dispositivo de este tipo permite visualizar bien los cuerpos que se pueden generar por rotación." p. 91

En résumé, il s'agit dans cette unité d'une prise de contact avec les vecteurs et avec la dimension 3 qui reste très limitée et presqu'exclusivement analytique. Toutefois, les représentations, graphiques en dimension 2, par maquettes en dimension 3 sont toujours présentes. Enfin les raisonnements se réduisent essentiellement à des calculs, la structure logique utilisée ne permet pas de valider les résultats annoncés.

Formación Diferenciada

L'option comporte 3 unités ; l'une est centrée sur les processus infinis et dans ce cadre présente des itérations en contexte géométriques, la troisième traite des fonctions trigonométriques (formules et équations) sans retour sur le géométrique.

Dans la première unité, les activités font construire les premières itérations de fractales bien connus comme le triangle de Sierpinski et le flocon de Von Koch, le reste du travail est consacré à l'itération des formules de périmètre et d'aire. Le travail géométrique est donc très réduit.

3.2.2 Synthèse

La classe de Sexto año Básico définit en quelque sorte un état initial d'un espace de travail géométrique qui évolue très progressivement au cours des années ultérieures.

- Les objets étudiés sont soit des dessins aux instruments, c'est-à-dire des objets de GI, soit des objets matériels qui peuvent être modélisés par des dessins relevant de GI.
- Les activités de classification occupent une place importante : elles ne visent pas la détermination de caractérisation minimale ni de classes emboitées.
- Si l'on excepte les catégories ainsi déterminées et le vocabulaire correspondant, les résultats établis dans les situations de recherche proposées ne sont pas mis en jeu dans des activités ultérieures dont ils constitueraient une axiomatique locale.
- Les résultats sont validés à partir d'une expérimentation répétée mais nécessairement limitée et un consensus local entre élèves ; le professeur ne semble pas sollicité pour apporter des éléments de validation complémentaires. ·

La classe de Septimo año Básico est marquée par plusieurs évolutions importantes qui ne seront pas également maintenues dans la suite :

- Si les activités exploratoires conduisent les élèves à travailler sur des objets matériels ou sur des dessins, les objets étudiés deviennent explicitement des classes infinies, la

vérification sur un nombre fini de cas, par des procédures qui peuvent reposer sur l'évidence visuelle, la manipulation ou le mesurage, ne produit que des conjectures ; le professeur est sollicité pour valider les conjectures formulées par les élèves dans les activités exploratoires mais les formes de cette validation ne sont pas explicitées (des preuves de type dynamique, l'association de lecture sur le dessin et de calculs algébriques – voir étude thématique sur le théorème de Pythagore – sont possibles).
Évolutions ultérieures : Jusqu'en 4M, les théorèmes enseignés donnent lieu à des activités portant sur des objets de GI dans le but explicité à tous les niveaux d'aider les élèves à donner du sens aux connaissances mathématiques.
La différenciation cas particuliers/généralisation subit une certaine éclipse en 8B et 1M, elle est de nouveau mise en avant explicitement en 2M et 3M. En 4M, dans le cadre d'une géométrie essentiellement analytique, elle est associée au développement du calcul algébrique comme outil.

– En 7B, la plupart des résultats établis concernent des relations entre mesures comme ce sera le cas à tous les niveaux. Ces propriétés s'expriment sous forme d'égalités qui en toute rigueur ne peuvent s'appliquer à des objets de GI sans une "théorie" des erreurs comme en Physique. Cette dimension est totalement absente. Alors qu'en France cette difficulté conduit à l'interdiction du mesurage et au passage à GII, il semble que l'espace de travail adopté au Chili vive dans une "illusion de l'exactitude" : les objets du travail géométrique sont des classes de dessins réalisés aux instrument de tracés géométriques qu'il serait possible de mesurer exactement (ceci explique l'importance accordée aux techniques de tracés).
Evolutions ultérieures : L'apparition en 8B de la notion de nombre i-decimal (Bronner 1998) et irrationnel à l'occasion du travail sur le périmètre et l'aire du disque introduit deux idées dont les relations ne sont pas claires : certaines mesures ne peuvent pas être mesurées exactement ; certaines mesures ne sont pas décimales. Dans le cas de l'aire du disque, l'i-décimalité de la mesure semble devoir être fondée par l'impossibilité d'identifier le cercle à un polygone, ceci ne peut se concevoir sans une conception abstraite du cercle et donc un passage à GII. Mais ce point reste implicite. Par contre, le fait que certaines mesures sont i-décimales ou irrationnelles et ne peuvent pour cette raison être mesurées exactement sera ultérieurement invoqué (3M) pour expliquer des variations dans la vérification expérimentale de certaines relations et introduire une certaine méfiance vis à vis du mesurage ; on voit même apparaître un début de réflexion sur l'effet des approximations du calcul à la calculatrice. Ceci ne conduit toutefois jamais à l'explicitation de la nature idéelle des objets géométriques qui n'est à aucun moment invoqué pour motiver la nécessité de la démonstration.
– Un certain nombre de résultats issus des activités exploratoires des élèves et validés ou non par le professeur sont utilisés dans des déterminations de mesures par raisonnement.
Evolutions ultérieures : L'axiomatique locale constituée par les résultats établis s'enrichit. Dès la classe de 8B, les raisonnements utilisant les théorèmes connus et les données initiales sont explicitement préférés au mesurage dans les exercices d'application mais ce choix n'est pas justifié. Les élèves se trouvent donc engagés dans des travaux qui peuvent être lus comme relevant de GII, même si le changement de paradigme n'est pas explicite.

L'Enseñanza Media est le lieu de l'entrée explicite de la démonstration dans le topos de l'élève. On y voit également apparaître certains éléments caractéristiques de la démonstration dans GII avec les notions de conditions nécessaires et suffisantes, de caractérisation minimale et de catégorisation inclusive en 1M, d'hypothèse et de conclusion en 2M.

Cette « charge de la preuve par démonstration » n'est pas cantonnée aux exercices d'application, elle revient également aux élèves dans la plupart des activités exploratoires débouchant sur la formulation et la démonstration des théorèmes figurant au programme. Mais nous insisterons sur le fait que la démonstration est toujours précédée d'activités portant sur des objets de GI permettant aux élèves de formuler des résultats et d'en donner un premier niveau de preuves pragmatiques.

Les formes de la démonstration ne correspondent pas toujours aux canons de la démonstration formelle du paradigme GII. En Primero Medio notamment, l'objectif visé est que les élèves produisent des argumentations cohérentes, qui peuvent associer des éléments formalisés à des preuves non axiomatisées comme des dessins et des pliages. L'année suivante donne lieu à un véritable travail sur l'apprentissage de la démonstration. Toutefois, on peut avancer qu'il ne s'accompagne pas comme en France d'une interdiction des autres formes de validation. La démonstration est préférée quand elle est possible mais aucun statut de « théorème admis » ne vient différencier des résultats non démontrés, ce qui est par exemple le cas, dans certains manuels de 2M, du théorème de Thalès. Il règne donc un certain flou sur l'espace du travail géométrique. Cette question n'est à aucun moment éclaircie, on peut penser que le passage à la géométrie analytique dans l'option de 3M et en 4M permettra d'éviter d'aborder la question de la nature des objets géométriques en transférant le travail dans le numérique. Nous retiendrons enfin que dans ce contexte de la géométrie analytique, les ambitions quant à la démonstration sont très modestes, éludant par exemple complètement la question de la structure logique des raisonnements.

3.3 Annexe

Etude de la place accordée en France au mesurage dans les manuels de Sixième.

L'objectif de cette étude est de préciser la place accordée aux dessins dans la classe de Sixième. En effet, si un faisceau d'indicateurs prouve qu'à partir de la Cinquième la géométrie visée relève du paradigme de la Géométrie II, les instructions sont plus ambiguës pour la Sixième. Comme au primaire, une grande place est accordée aux activités de dessins géométriques (usage des instruments, nouvelles techniques de tracés) avec une attention particulière aux qualités pratiques que sont l'ordre et le soin. Tous les types d'activité de réalisation de dessins rencontrés au Cycle 3 sont poursuivis (à partir d'un texte, d'un modèle, d'un schéma). Mais, par rapport à l'Elémentaire, le programme de sixième est marqué par une évolution de fond : la possibilité de valider par usage d'instruments n'est plus mentionnée ; par contre, un accent nouveau est mis sur l'apprentissage du raisonnement et la mise en place de séquences déductives. L'usage des instruments de mesure pour prélever des informations qui serviront éventuellement à valider une affirmation est-il proscrit en Sixième ? Les textes officiels n'étant pas explicites sur ce point, nous recourrons à une analyse de manuels pour répondre à cette question.

1. Programmes

Organisation de l'enseignement

p. 19 Le travail effectué permet aussi à l'élève d'acquérir et de parfaire l'usage d'instruments de mesure et de dessin.

p. 20 Les travaux géométriques prennent appui sur l'usage des instruments de dessin et de mesure, y compris dans un environnement informatique

Explicitation des contenus

Géométrie

p.21 Contenu : Reproduction de figures planes simples

Commentaires : Il s'agit de développer les connaissances acquises à l'école élémentaire en vue de

– compléter et consolider l'usage d'instruments de mesure ou de dessin (règle graduée ou non, compas, équerre)...

  Les travaux de reproduction et de construction pourront consister en ...
– la copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin ;
– un dessin à partir de données graphiques et numériques

p.22 Contenu : Surfaces planes : mesure, comparaison et calcul d'aires et de périmètres

Organisation et gestion de données. Fonctions

p.27 Contenu : Exemples issus d'activités

– à base numérique Compétences exigibles : Effectuer éventuellement avec une calculatrice, des calculs faisant intervenir diverses grandeurs : longueurs, angles, aires, volumes, durées Commentaires : On se servira de ces exemples pour lire et établir des relevés statistiques sous forme de tableaux ou de représentations graphiques [...], étudier des situations (échelles, tarifs ...) relevant ou non du modèle proportionnel.
– à base géométrique : calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, de la longueur d'un cercle.

A priori, on peut s'attendre à ce que les activités suivantes puissent donner lieu aux relevés de mesures de grandeurs sur un dessin :

– reproduction de dessins à l'identique (mais dans ce cas, il ne s'agit pas forcément de mesures)
– travail sur les angles
– travail sur les périmètres, aires et volumes
– travail sur les échelles
– lecture de représentations graphiques de données.

2. Analyse de manuels.

Nous avons analysé les trois manuels de sixième les plus utilisés : Collection Transmath (Nathan), Triangle (Hatier) et Cinq sur Cinq (Hachette) -édition 2000[19].

Il s'agit ici de rechercher dans les chapitres qui semblent les plus propices à ce genre de tâches les exercices qui donnent lieu à une prise d'information par mesure sur un dessin ou sur un objet.

Dans une perspective de comparaison, nous avons également dénombré les exercices demandant la détermination d'une mesure par calcul et parmi ceux-ci, ceux qui intègrent une démarche de résolution d'équation, même très simple (l'objectif est de mettre en évidence la fonction de la géométrie comme terrain de travail d'autres domaines des mathématiques).

Nous nous sommes également intéressés au nombre d'exercices de géométrie renvoyant à des situations concrètes.

Enfin, le nombre de travaux de reproduction de dessins à l'identique nécessitant la prise d'information par mesure ou relevé au compas a été déterminé .

Synthèse des observations (voir page suivante, tableaux des résultats) :

– *Gestion de données*

  Les représentations ne sont quasiment pas utilisées pour prélever directement de l'information. Dans le chapitre consacré à la représentation des données numériques, au plus un exercice dans chaque manuel nécessite la réalisation d'une reproduction à l'échelle, il s'agit dans chaque cas de réaliser le dessin à partir de données fournies par le texte.

– *Géométrie*

  Si l'on excepte le chapitre sur les angles dont l'enjeu central est, dans deux des manuels au moins, l'apprentissage de l'usage du rapporteur, on constate **le caractère très marginal de la prise d'informations par mesure sur dessin ou sur objet** : le pourcentage du nombre d'exercices nécessitant une mesure relativement au nombre total d'exercices est de 9.5 % dans Triangle, 4.5% dans Cinq sur Cinq, 2.8 % dans Transmath ; dans les deux premiers manuels, le taux tombe respectivement à 4,2% et 1.3% si l'on exclut le chapitre sur les angles.

  Les tâches consistant à reproduire à l'identique des dessins donnés sur papier blanc sans aucun codage ou information complémentaire et qui devront donc être réalisées en mesurant ou en reportant des longueurs au compas sont également peu présentes : 1.6% des exercices pour Triangle, 4.3% pour Cinq sur Cinq et 8.8% pour Transmath ; ce dernier manuel accorde visiblement plus d'importance à la reproduction de dessins que les deux autres et dans ce contexte, à la construction de symétriques d'un dessin donné, ce qui conduit à un nombre élevé de reproductions de dessin.

  Hormis le rapporteur, les instruments sont avant tout des instruments de tracés, ils traduisent, incorporent des informations dans le dessin, ils ne permettent pas d'en obtenir.

[19] Les résultats concernant les chapitres de géométrie sont résumés dans des tableaux

Si des mesures sont nécessaires (construction de figures, calcul de mesures, étude de situations concrètes), les valeurs sont le plus souvent données par le texte. Les trois manuels se distinguent quant à l'importance accordée à la défiance par rapport aux instruments. Triangle ne pointe pas particulièrement l'impossibilité de lire des résultats sur un dessin, à vue ou par instrument ; les auteurs ne donnent pas un statut spécifique aux observations sur dessins qu'ils ne s'interdisent pas de faire réaliser aux élèves. Au contraire, Cinq sur Cinq introduit la notion de conjecture et revient à plusieurs reprises sur le fait que les instruments ne permettent pas de prouver. Transmath aborde l'impossibilité d'être certain en utilisant des instruments (imprécision, illusion d'optique) et la nécessité de démontrer pour prouver en mathématiques dès le premier chapitre de géométrie mais insiste moins sur ce point que le manuel précédent.

Le calcul de mesures est un thème particulièrement développé (29.6% des exercices dans Triangle et Cinq sur Cinq, 15.4% dans Transmath). Dans les deux premiers manuels, environ un quart de ces exercices sont une occasion pour travailler l'approche de la démarche d'équation (par exemple, calculer la longueur d'un côté d'un rectangle connaissant le périmètre et l'autre côté) ; ce pourcentage est plus faible dans Transmath (6.9%).

Conclusion

Bien que cette orientation ne soit pas explicitement donnée par les textes officiels, les manuels marginalisent le recours aux instruments de mesure pour obtenir des informations. Dans le cours de mathématique, la détermination de mesures se fait par calcul et non par recours aux instruments ; si des mesures sont nécessaires pour appliquer un calcul, elles sont données. Deux des trois manuels s'attachent à développer la méfiance des élèves vis à vis du dessin, introduisant la nécessité de la démonstration pour valider.

Triangle 6^e (Hatier)

Chapitre	Parallèles Perpendiculaires	Longueurs	Cercles Triangles Quadrilatère	Aires	Angles	Symétrie axiale	Pavé droit	Volumes de pavé	Total
Nbre total exercices	60	58	58	71	60	58	44	33	442
Nécessitant mesures sur dessin	0	6	2	3	26	2	0	3	42
Calcul de mesures	0	36	7	58	8	1	0	21	131
Dont avec équation	0	10	4	12	0	0	0	5	31
Contexte concret	1	8	0	19	0	1	1	12	42
Reproduction pb, non codé	0	2	1	0	0	4	0	0	7

Transmath 6^e (Nathan)

Chapitre	Reproduction figures	Figures usuelles	Périmètre Aire	Symétrie axiale	Figures symétriques	Pavé droit	Total
Nbre total exercices	76	78	79	79	85	70	467
Nécessitant mesures sur dessin	10	0	0	2	0	1	13
Calcul de mesures	6	1	35	9	1	20	72
Dont avec équation	0	0	0	0	0	5	5
Contexte concret	1	0	0	1	1	7	10
Reproduction pb, non codé	10	3	1	14	13	0	41

Cinq sur Cinq 6^e (Hachette)

Chapitre	Equerre règle	Compas, règle graduée	Périmètres Aire	Symétrie axiale	Figures symé-triques	Rapporteur	Espace	Total
Nbre total exercices	66	69	81	66	85	67	74	611
Nécessitant mesures sur dessin	1	2	1	0	3	20	0	27
Calcul de mesures	5	20	57	7	8	18	42	181
Dont avec équation	1	4	19	0	3	8	8	48
Contexte concret	0	5	24	0	0	0	23	53
Reproduction pb, non codé	5	4	0	5	3	9	0	26

Chapitre 4

Trois études thématiques géométriques

Le théorème de Pythagore, le périmètre et l'aire du disque, les figures de même forme

Sommaire analytique

L'objectif de ce chapitre est d'approcher d'un peu plus près l'enseignement effectif en adjoignant les manuels scolaires à nos objets d'étude. Il nous est en contrepartie nécessaire de centrer le travail sur des thèmes précis. Ceux-ci ont été choisis pour leur caractère emblématique, leur situation dans les programmes des deux pays et la diversité des questions qu'ils nous permettent d'approfondir.

L'étude se place donc ici à trois niveaux d'investigation : étude des textes réglementaires, des documents d'accompagnement (nommé dans la suite Dacc) et des manuels qui nous donnent accès aux interprétations des instructions émanant du ministère[1] que font leurs auteurs.

Le théorème de Pythagore

En France, le théorème de Pythagore est enseigné en quatrième en distinguant bien partie directe et réciproque. Il est l'objet d'une reprise explicite en Seconde où les élèves sont amenés à produire des démonstrations en utilisant la notion d'aire. Au Chili, on peut dire qu'il est présenté sous forme d'une équivalence, pour la première fois en 7B (équivalent de la 5ème), puis repris dans les Dacc en 3M (équivalent de la Première) avec une démonstration basée sur le théorème d'Euclide. Mais à aucun moment, la décomposition en deux énoncés logiquement équivalents n'est pas mise en avant. La réciproque n'est en vérité invoquée qu'à l'occasion de travaux sur les utilisations du théorème dans des activités de la vie quotidienne et professionnelle. Elle ne donne pas lieu à des exercices impliquant les élèves dans la démonstration qu'un angle est ou n'est pas droit. Ce type d'exercices est au contraire

[1] Signalons que, si en France la publication des manuels est libre, sans contrôle des contenus par les autorités ministérielles, il n'en est pas de même au Chili où le processus de Licitación pèse sur les choix des auteurs : pour chaque niveau, le Ministère de L'Education déclare officiels (et gratuits pour les élèves des écoles publiques) un ou des manuels, jugés conformes et équilibrés dans leur rapport qualité-prix par une commission ministérielle ad hoc. D'autres manuels sont certes édités mais par ce biais, le Ministère exerce une influence déterminante sur le choix des manuels. En France, les équipes d'enseignants sont au contraire libres de leur choix, en dehors de toute influence officielle.

très présent en France où il est l'occasion d'exercices amenant les élèves à se défier des conclusions qu'ils pourraient tirer d'un dessin : alors qu'en réalité deux espaces de travail sont confrontés dans ces travaux, aucune réflexion sur ce sujet n'apparaît dans les différents niveaux de textes analysés, ni à l'intention des professeurs ni à celle des élèves.

Au Chili, les Dacc proposent aux élèves plusieurs activités d'introduction au résultat concernant la somme des carrés des côtés du triangle rectangle, jouant successivement sur les aspects géométrique (manipulations de puzzle) et numérique de l'aire. On insiste sur le fait que le résultat ainsi obtenu n'est qu'une conjecture ; pour une démonstration, le lecteur est renvoyé à la consultation d'un site où seul un texte en anglais est disponible. Cette stratégie est reprise par les manuels avec des développements plus ou moins conséquents suivant que le manuel est *licité* ou pas ; la nécessité d'une démonstration n'est mise en avant.

En France, l'introduction au théorème varie suivant les manuels : si un travail de vérification numérique est proposé aux élèves, l'aspect géométrique de l'aire est suivant les cas du côté des élèves avec référence à des puzzles ou du côté du professeur pour une démonstration. La conversion des activités sur les puzzles en une démonstration entraîne un changement de paradigme difficile à assumer vue l'absence de réflexion sur le sujet.

Dans les deux pays, lorsque les élèves sont impliqués dans des actions de mesurage visant à établir empiriquement la relation, la question des approximations est passée sous silence ; ce problème est évité en France par la donnée des mesures.

L'importance accordée au Chili aux activités d'introduction au théorème est clairement mise en évidence par l'équilibre des travaux proposés aussi bien dans les Dacc que dans les manuels : activités exploratoires et exercices d'application apparaissent en proportion à peu près équivalentes. Ce n'est absolument pas le cas en France où l'essentiel du travail des élèves est centré sur l'utilisation du théorème direct et réciproque dans des démonstrations formalisées.

Dans les deux pays, certains exercices portent sur des situations concrètes (calculs de longueurs) mais les élèves ne sont confrontés ni au mesurage ni à la modélisation, les énoncés s'accompagnant d'un schéma géométrique. Néanmoins, l'approche chilienne inscrit le théorème de Pythagore dans une culture professionnelle en insistant sur l'emploi concret de la réciproque, matérialisée par des outils spécifiques et en suggérant des enquêtes auprès de certaines professions, voire la réalisation effective d'objets. Un tel souci est absent des manuels français.

Aire et périmètre du disque

Au Chili, ces deux thèmes sont abordés dans une même unité en 8B (équivalent de la 4^{e}) ; dans la mesure où cette classe aborde également la notion de développement décimal illimité, le travail sur le périmètre et l'aire du disque est l'occasion d'une approche du caractère non décimal de π. En France, la formule du périmètre est enseignée au cycle 3 du Primaire jusqu'en 2002, en Sixième dans le nouveau programme ; la formule de l'aire relève dans les deux cas de la classe de Cinquième. La notion de développement décimal illimité n'apparaît jamais explicitement dans les programmes de collège (mais elle est rencontrée avec la division de deux entiers et les fractions rationnelles) ; on aborde en Troisième la question de l'irrationalité. Ainsi, au moment où ce nombre se révèle nécessaire, π n'est pas l'objet d'aucune réflexion particulière relative à sa nature.

Cette étude confirme l'extrême attention portée par le Chili au processus d'introduction aux notions et aux résultats enseignés. Les Dacc proposent ainsi successivement des activités faisant travailler sur les concepts mêmes de périmètre et d'aire dans le cas d'objets non rectilignes et leur mesurage par différents procédés concrets, une vérification expérimentale de la proportionnalité Périmètre/diamètre, enfin deux méthodes par passage à la limite pour obtenir la formule de l'aire. Les manuels *licités* reprennent assez fidèlement à leur compte ces suggestions ; ce n'est pas le cas du manuel non officiel étudié dont l'approche est comparable à celle des manuels français les plus expéditifs.

En France, l'échantillon de manuels examinés montre une grande diversité : un tiers adopte une stratégie d'implication des élèves comparables à celle du Chili, un tiers propose des activités souvent directives et excluant tout mesurage, un tiers donne les formules et se contente de les faire appliquer. Les manuels les plus utilisés n'adoptent jamais la première stratégie.

Concernant l'espace du travail géométrique et la nature des objets en jeu, les Dacc ébauchent, mais de manière très confuse, une ouverture vers le passage à des objets idéels. Leur souci est d'introduire l'idée que le nombre pi n'est pas décimal en s'appuyant sur l'impossibilité d'obtenir une valeur exacte de la mesure de l'aire du disque, non par remise en cause de l'illusion d'exactitude du mesurage que nous avons évoquée dans le chapitre précédent mais parce que le disque n'est jamais exactement confondu avec un polygone. Un tel point de vue n'est envisageable qu'à la condition d'adopter une conception abstraite du cercle, mettant en avant une courbure invariante quel que soit le zoom effectué qui contredit toute expérience. Cette démarche n'est toutefois pas clairement explicitée et les textes sont constamment ambigus, ce qui introduit un doute certain quant aux possibilités de reprise par les professeurs. De fait, la réflexion sur pi est le seul point sur lequel les manuels licités ne suivent pas les Dacc. Néanmoins, l'apparition de mesures non décimales permet à ce niveau et permettra dans la suite de la scolarité d'introduire l'idée d'approximation dans l'acte de mesurage.

En France, le contexte numérique au moment de l'enseignement des deux formules fait que de telles réflexions ne peuvent pas être objets de développement, certains manuels signalent néanmoins que pi n'est pas décimal, il est évident que ceci ne peut guère faire écho chez les élèves.

Les figures de même forme

Au Chili, les classes de 6B (équivalent de la 6^e) et 8B (équivalent de la 4^e) proposent une première rencontre limitée avec les notions d'agrandissement réduction en 6B, de triangles semblables et de représentation à l'échelle en 8B. Les aspects numériques (proportionnalité) et géométriques (conservation des angles, de la forme) sont travaillés dans GI. Ce thème est repris en 2M dans une unité qui associe dans un tout cohérent les notions et théorèmes suivants : représentation à l'échelle, agrandissement réduction, triangles de même forme, homothéties, théorème de Thalès, critères de similitude, point de vue historique et artistique sur la question des proportions.

A tous les niveaux, la notion de figures de même forme est motivée par la question de la production de représentations fidèles du monde réel : il s'agit de construire des représentations qui ne déforment pas la réalité et permettent en retour d'obtenir, notamment par mesurage, des informations inaccessibles dans la situation grandeur nature. En 2M (équivalent de la 2nde) particulièrement de nombreux exemples de situations issues de la vie réelle (détermination de grandeurs inaccessibles) sont proposés. Dans certains cas, les résultats enseignés permettent d'obtenir par calcul les mesures cherchés, dans d'autres, les élèves sont conduits à mesurer sur un plan à l'échelle, chose impossible en France à partir de la Sixième et ce alors que, nous l'avons vu, la 2M est la classe où débute véritablement l'apprentissage de la démonstration. Dans ce contexte, les critères de similitude des triangles permettent d'étayer au niveau théorique plusieurs techniques de construction de représentations à l'échelle utilisant égalité des angles et/ou proportionnalité des longueurs et valident la prise d'information sur la représentation.

Par ailleurs, la notion de figures de même forme n'est pas considérée comme allant de soi ou comme déjà disponible chez les élèves. Nous retrouvons donc dans les Dacc comme dans les manuels *licités*, de longues séquences d'activités d'acculturation à cette notion, stratégie auxquels les deux autres thèmes nous ont déjà habitués.

Concernant les deux résultats théoriques de ce réseau, théorème de Thalès et critères de similitude, Dacc comme manuels proposent une exploration expérimentale de l'un d'entre eux, les activités proposées par les manuels étant plus directives que celles qui sont présentées dans les Dacc. Les textes officiels font référence à des démonstrations de ces deux résultats sans plus de précision. Les manuels n'ont pas une position très claire sur ce point. Le théorème de Thalès est institutionnalisé sans remarque particulière relative au fait qu'il a seulement été vérifié expérimentalement dans deux manuels sur quatre, sans lien avec la licitation. Quant aux critères de similitude pour les triangles, ils sont énoncés sans démonstration dans deux manuels, l'un est démontré dans deux autres.

Outre les applications au monde réel déjà évoquées, ces résultats sont utilisés dans des exercices internes aux mathématiques. Nous retiendrons enfin une attention réelle aux liens de ce réseau avec des questions artistiques, comme par exemple la place de la divine proportion dans les Arts.

L'espace de travail proposé aux élèves et aux professeurs est donc relativement confus. Le corpus de théorèmes se constitue à partir de problèmes, internes ou externes aux mathématiques, au sein de ce qui semble être de la Géométrie II. Mais comme ces théorèmes-résultats ne sont pas toujours efficaces pour résoudre les problèmes posés, l'élève a toujours la possibilité de se placer en Géométrie I et d'utiliser des techniques que les théorèmes de GII permettent de justifier (technique de tracé d'une représentation à l'échelle par reproduction des angles, proportionnalité des mesures prises et des mesures réelles...). De plus, en l'absence d'un statut de théorème admis, l'appartenance des théorèmes au paradigme de GII n'est pas évidente puisque dans certains cas, ils sont institutionnalisés à partir d'une vérification expérimentale.

En France, les différentes notions du réseau conceptuel sont présentées successivement : représentation à l'échelle en 5^e, théorème de Thalès en 4^e puis 3^e, effet de l'agrandissement réduction sur les aires et les volumes en 3e, triangles de même forme en 2^{nde}, homothéties en Première S. Enfin l'enseignement de Spécialité de Terminale S aborde la notion de similitudes.

Si les chapitres successifs voient (mais de manière inégale suivant les manuels) se réaliser une mise en relation des différents éléments, le réseau obtenu n'intègre pas la problématique de la représentation à l'échelle qui reste marginale et quasiment cantonnée à l'année de 5ème. Les représentations à l'échelle ne reçoivent aucune véritable fonctionnalité dans la mesure où la conception privilégiée des mathématiques exclut, à partir du collège, la prise des informations par mesurage sur un objet matériel, y compris un dessin. Seule la dimension numérique de la représentation à l'échelle est travaillée.

Les différentes notions du réseau conceptuel sont abordées d'un point de vue interne aux mathématiques. Ainsi, la notion de triangles de même forme n'est motivée par aucune problématique articulée sur la réalité et rien ne vient justifier son introduction. L'agrandissement réduction reste cantonné, avec l'homothétie puis la similitude, aux limites des figures géométriques représentées dans le cadre de la feuille de papier, excluant tout travail de réalisation matérielle de dessins à l'échelle.

A partir de la quatrième, les applications se situent dans le cadre strict de la géométrie et elle permettent le travail de la démonstration formelle. En Terminale S, les textes officiels justifient la finalité du chapitre sur les similitudes par son statut de synthèse théorique. Là encore, sauf exception, ces chapitres ne donnent pas lieu à la confrontation à des situations du monde réel. La dimension artistique de la question est un peu plus présente, en Seconde.

Sur le plan de la validation, les théorèmes sont démontrés. Seul le théorème de Thalès est l'objet d'un traitement différent en 4^e : il est vérifié expérimentalement sur un nombre très limité de cas, démontré dans un cas particulier (rapport rationnel donné) puis prend le statut de théorème admis ; mais sa généralisation en 3^e est établie par démonstration et la classe de 2^{nde} propose une démonstration par les aires. L'espace de travail est donc clairement celui de la Géométrie II, on ne trouve pas ici la confusion entretenue au Chili par ce qui apparaît comme une volonté de ne pas se priver des ressources de GI.

4.1 Le théorème de Pythagore

Cette étude vise à repérer un certain nombre de différences dans le traitement de géométrie enseignée entre les deux pays, France et Chili. Elle se nourrit aussi d'autres comparaisons, sur les textes de programmes et l'ordre « d'arrivée », de « longévité » des contenus.

Justification du choix de contenu

Le théorème de Pythagore est un théorème emblématique de l'enseignement français, prétexte à situations spatiales (grandeurs inaccessibles) ou géométriques. Il est repérable rapidement dans les programmes des deux pays.

Nous faisons l'hypothèse qu'il serait quelque part emblématique des différents choix possibles d'enseignement de la géométrie :

- un outil pour contrôler ses rapports à l'espace, par exemple calculer des distances inaccessibles ou installer un angle droit
- un moyen pour écrire des textes de démonstrations suffisamment consistants.

Niveaux d'étude

Comme pour les autres thèmes de ce chapitre, l'étude se place à plusieurs niveaux d'investigation :

- (Niveau 1) Le premier concerne les programmes officiels, ce qui constitue la référence obligatoire : les contenus (items principaux, items dérivés) pour le Chili, les contenus et les compétences exigibles pour la France ·

L'étude se poursuit vers le savoir« apprêté », où nous envisagerons deux niveaux.

- (Niveau 2) L'interprétation des contenus par l'institution : comme il l'a déjà été vu dans les chapitres précédents, au Chili, des Documents d'Accompagnement prodiguent aux enseignants des conseils officiels très consistants de mise en œuvre par niveau (Actividades de aprendizaje) ; en France, ces mêmes documents sont beaucoup plus succincts, surtout au collège qui est le niveau concerné par cette étude (des fiches plus détaillées accompagnent la mise en œuvre des nouveaux programmes).
- (Niveau 3) L'interprétation des documents institutionnels (légaux ou d'orientation) par les auteurs de manuels ; nous ferons l'hypothèse que les auteurs de manuels ont accès à l'ensemble des documents institutionnels.

Pour étudier ces niveaux, nous nous appuierons sur le cadre d'analyse des paradigmes géométriques présenté dans le chapitre 2 et aussi, pour étudier les activités proposées sur une typologie d'activités inspirées de Chevallard (1991), qui essaie de caractériser la dominante d'une activité entre Première Rencontre, Emergence d'une technique, Travail de la technique, Elaboration d'éléments d'une technologie justifiant la technique, Insertion dans les mathématiques théoriques, Institutionnalisation.

4.1.1 Etude des programmes officiels

Niveau 1

Au Chili

Au Chili, la première rencontre avec le théorème de Pythagore a lieu en 7B sous l'intitulé des Contenus Minima *Figuras y cuerpos geometricos Investigación sobre aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras.* Des propositions d'activités sont développées dans le tableau des unités avec leur temps moyen en semaines sur l'année sous la rubrique Unidad 5. *Potentia en la geometría y en los números.* qui comprend

- Interpretación de potencias de exponentes 2 y 3 como multiplicación iterada.
- Asociación de las potencias de exponente 2 y 3 con representaciones en 2 y 3 dimensiones respectivamente (áreas y volúmenes).
- Investigación de algunas regularidades y propiedades de las potencias de exponente 2 y 3.
- Investigación sobre aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras

A noter que le regroupement par unités en correspond pas toujours aux regroupements par Contenus Minima. Ici les activités d'introduction relatives à Pythagore ne font pas partie de l'Unidad 2. *Geometría : prismas, pyrámides y triángulos.* Aucune activité ou exercice de cette unité ne fait appel au Théorème de Pythagore.

Le théorème de Pythagore n'est ensuite plus explicitement mentionné dans le curriculum. Mais les triangles rectangles sont de nouveau à l'étude en 3M dans l'option mathématiques, notamment par le contenu :

> "Comentario histórico sobre los números irracionales ; tríos pitagóricos ; comentarios sobre el Teorema de Fermat" .

Des situations de retour sur le théorème de Pythagore sont proposées à cette occasion dans les Dacc, comme nous le verrons plus loin.

En France

En France, la première rencontre, que ce soit dans les programmes en cours (1998) ou en projet (2004 pour 2008), a lieu en 4^e. Les programmes (contenus et compétences exigibles) et accompagnements mentionnent

Contenus 1998	Compétences exigibles	Commentaires
Triangle rectangle et cercle. Cercle circonscrit, théorème de Pythagore et sa réciproque	Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle,- par la propriété de Pythagore et sa réciproque Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres. En donner s'il y a lieu une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche Racine d'une calculatrice. Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.	On poursuit le travail sur la caractérisation des figures en veillant à toujours la formuler à l'aide d'énoncés séparés

Projet 2007 Contenus	Compétences	Exemples d'activités, commentaires
Triangle rectangle : théorème de Pythagore et sa réciproque	Caractériser le triangle rectangle par le théorème de Pythagore et sa réciproque. - Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres. En donner, si besoin est, une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche Racine d'une calculatrice	Le travail sur la caractérisation des figures usuelles est poursuivi, en veillant à toujours la formuler à l'aide d'énoncés séparés

Le théorème apparaît ensuite en Seconde où il est l'objet de démonstration avec les aires.

Conclusion

En France, le théorème de Pythagore apparaît un an plus tard qu'au Chili (4^e au lieu de 7B) mais sous une forme de type modus ponens. Il a une place privilégiée pour la caractérisation des figures. Il s'insère donc dans un dispositif hypothético-déductif. Sa niche est entièrement dans la Géométrie II.

Au Chili, il existe officiellement dans les programmes de 7B non pas en tant que théorème inséré dans une théorie, mais pour ses applications « pratiques ». Par contre un retour en M3 lui garantit une insertion théorique, grâce notamment au théorème d'Euclide (relations métriques dans le triangle rectangle).

4.1.2 Etude des textes d'accompagnement

Niveau 2

En France

Les accompagnement du programme de mathématiques de collège pour la quatrième sont insérés dans ceux du Cycle central (5ème et 4^e) - cf. Programmes et accompagnement Mathématiques CNDP 1999-. L'Accompagnement se donne comme objectifs « *de présenter quelques réflexions pour préciser certaines orientations du programme* » page 61. Rien de spécifique n'est développé sur le théorème de Pythagore (contrairement à celui de Thalès).

Mais il existe un paragraphe « Raisonnement et démonstration en géométrie » (idem page 64) qui mentionne que les programmes prévoient depuis la 6ème une mise en place progressive de la démonstration ;

> « qu'il est de la responsabilité du professeur, en fonction de ses élèves, de décider de l'opportunité de démontrer certains résultats du cours (leur statut, admis sur conjecture ou établi, doit cependant être clair) et d'organiser des étapes de recherche et de déduction. »

Toutefois « *en classe de* 4^e, *on demande de façon plus systématique de repérer et de mettre en œuvre les théorèmes appropriés.* » Dans l'introduction aux contenus il était déjà rappelé que le théorème de Pythagore est un nouvel outil donné « *pour favoriser le développement des capacités de découverte et de démonstration* » ibidem page 51

Le théorème de Pythagore s'insère ainsi dans un programme qui met l'accent sur l'apprentissage de la démonstration, sur le statut des énoncés (conjectures, théorèmes admis ou démontrés).

Au Chili

Rappelons que les Documents d'accompagnement chiliens sont abondants. A chaque niveau, le texte de présentation générale rappelle les finalités de l'enseignement des mathématiques. Il insiste en particulier sur la résolution de problèmes comme moteur de la nécessité et de la construction du sens des apprentissages. L'origine des problèmes doit se situer dans la vie quotidienne des élèves, dans leurs jeux, être issus de lectures, d'informations historiques, de questions d'actualité. la nécessité que ces problèmes ait du sens pour les élèves est répétée plusieurs fois.

Chaque Dacc comporte une rubrique *Actividades* (Activités uniquement précisées par leurs objectifs pour les élèves) suivies par des *ejemplos concretos* (Exemples concrets , en réalité les activités proprement dites) illustrant des façons d'atteindre des objectifs, qu'il est conseillé d'adapter, de multiplier...

A l'occasion de ces différentes activités, les élèves doivent explorer des stratégies, développer et systématiser des processus, communiquer des résultats, utilisant progressivement le langage mathématique, justifier argumenter, chercher des régularités, travailler avec du matériel concret, fonctionner individuellement ou en groupes, proposer de nouvelles question ou problèmes, trouver et corriger leurs erreurs.

Chaque Dacc propose aussi, par unité, des *Actividades y problemas de evaluación* qui peuvent être individuelles ou de groupe. Il est rappelé que l'évaluation doit être en accord avec les activités d'apprentissage, il s'agit donc d'évaluer la capacité à résoudre des problèmes et pas seulement la mémorisation de faits.

Concernant l'item *Investigación sobre aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras* du niveau 7B, quatre types d'activités sont proposés.

Les premières incitent à travailler en groupe autour d'un matériel concret. Sont proposées une activité basée sur un puzzle, la décomposition- recomposition des triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle rectangle (donné en dessin) en le triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse, avec solution en annexe- et des questions guidées pour établir une relation entre l'aire du *grand* triangle rectangle et la somme des aires des deux *petits* triangles équilatéraux. Il est conseillé ensuite de recommencer la même activité (toujours avec des puzzles) avec des hexagones réguliers, puis avec des carrés ; tous ces polygones sont construits sur les côtés du triangle rectangle.

Les élèves sont ensuite conduits à vérifier la relation sur les aires des carrés si le triangle n'est pas rectangle (page 143 d) ; puis à inférer une conjecture concernant les aires des polygones réguliers construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle. La conjecture est bien présentée comme telle :

> que es una conjetura y no una conclusión general, la cual requeriría de una demostración -

Nous notons une insistance particulière sur le rôle de la répétition d'expériences (sur les triangles, les hexagones, les carrés, si nécessaire aussi avec des sur du papier quadrillé...) pour que les élèves parviennent à une formulation conclusive.

La deuxième série d'activités vise à ce que les élèves s'emparent de procédés numériques pour vérifier les conclusions sur les aires reliées aux carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle, en essayant sur des triangles rectangles différents. La conjecture suivante, livrée aux élèves, peut alors être analysée

> Cualquiera sea el triángulo rectángulo, se cumple que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual a del cuadrado construido sobre la hipotenusa

Il est de nouveau conseillé aux enseignants de distinguer conjecture (issue des deux premières activités) et le théorème, vu comme la généralisation démontrée de la conclusion.

> Es importante también que comprendan la diferencia entre las conjeturas que han hecho a partir de las actividades y una conclusión general (en este caso, formulada en el Teorema de Pitágoras) page 144.

Deux remarques s'imposent : à aucun moment, la difficulté pour la vérification du résultat inhérente aux problèmes de réalisation et de mesures en Géométrie I n'est signalée ; il n'y a pas d'étude explicite d'une quelconque réciproque.

Puis il est conseillé de faire chercher aux élèves des renseignements sur Pythagore sur un site (adresse fournie) de l'Université de Santiago du Chili présentant les grands mathématiciens : la consultation fournit des éléments vulgarisés de la biographie de Pythagore (notamment il est dit qu'il épousa une de ses élèves), l'énoncé (en anglais) du théorème (direct) et la partie algébrique d'une démonstration par les aires des carrés construits sur les côtés du triangle rectangle (cf. annexe).

Notons que le professeur semble chargé de proposer une démonstration :

> una conclusión general respecto de los cuadrados se obtendrá en las actividades que siguen y será validada por la profesora o profesor a través de una demostración simple p. 143

La troisième série d'activités propose « *d'utiliser le Théorème de Pythagore pour résoudre des problèmes de calcul de distances* », à partir de réalités évoquées et dessinées (diagonale d'un terrain de football, route en pente, distance entre deux personnes).

Les situations évoquées visent sans doute à montrer l'intérêt de calculs relatifs à Pythagore pour des pratiques spatiales usuelles (par exemple recherche de distances inaccessibles). Mais telles quelles (et dans la mesure où les élèves pourraient déduire les longueurs demandées en faisant un dessin à l'échelle suivi d'un mesurage), elles ne sont qu'un prétexte à utilisation du théorème de Pythagore, elles ne convainquent pas de sa nécessité.

La quatrième série d'activités déclare s'atteler à « rechercher des applications de Pythagore dans des situations quotidiennes », comme le contrôle des angles droits ; établir des conclusions sur les nombres pythagoriciens ; étudier la corde à douze nœuds attribuée aux Egyptiens ; déterminer la longueur d'un câble permettant à un wagon d'effectuer un certain parcours ; trouver un moyen de tracer un rectangle sur le sol (avec déplacement dans la cour conseillé) ; placer quatre pieds sous une table (avec support d'une maquette ou d'un dessin conseillé) ; il est également suggéré aux élèves d'interroger un charpentier ou un menuisier pour savoir comment il vérifie la présence d'angles droits et comment il s'y prend pour les réaliser.

Dans ces activités, la modélisation par un dessin est en général donnée aux élèves. Par contre cette modélisation est bien un enjeu du dernier exercice (fabrication d'une table) qui pose véritablement un problème concret :

> Que pasaría si las patas no estuvieran en ángulo recto respecto a la cubierta, es decir, si tu base no está en ángulo recto con la altura de ellas ? Comprueba tu aseveración.

Mais le Comentario limite l'initiative de l'élève quant à la modélisation en incitant le professeur à s'appuyer sur des dessins pour bien faire comprendre la situation.

En résumé, on trouve cinq activités d'étude et de recherche (AER) (premières rencontres, exploration de la technique qui consiste à trouver une longueur de triangle les deux autres étant connues, émergence d'une technologie – justification par les aires – rien sur le bloc technologie/théorie[2]) conduisant au théorème, et six activités de types exercices et problèmes[3] (EP). Le moment de l'institutionnalisation est, comparativement aux activités citées, peu mis en valeur.

Concernant les mathématiques de 3M, les Dacc proposent p89 dans l'unité 3 : *Más sobre triángulos rectángulos* une séquence d'activités qui s'intitule

> "Comparan diversas maneras de demostrar el Teorema de Pitágoras ; generan tríos pitagóricos y conocen algunos antecedentes sobre la antigua conjetura de Fermat"

pour illustrer le contenu précédemment mentionné.

Trois activités (3 AER exploration de la technique, émergence de la technologie, construction du bloc technologie /théorie, une nouveauté par rapport à 7B) sont proposées aux élèves.

Les deux premières consistent à organiser de deux façons différentes un mouvement dynamique de pièces de puzzle (dont le triangle rectangle d'origine et les trois carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle) pour « démontrer » le théorème de Pythagore. Aucune précaution n'est signalée au professeur concernant le lien entre la superposabilité des agencements de pièces (notamment l'approximation des ajustements) et l'égalité théorique des aires. Le changement de statut entre informations renvoyées par la manipulation des objets matériels et informations déduites de données textuelles reste implicite.

La troisième consiste à démontrer algébriquement le Théorème de Pythagore à partir du Théorème d'Euclide (relations entre côtés et hauteur dans un triangle rectangle). Le Théorème d'Euclide a pu lui par contre être établi théoriquement en s'appuyant sur les propriétés des triangles semblables (page 87).

La suite s'intéresse aux nombres pythagoriciens et mentionne le théorème de Fermat.

Dans la rubrique *Actividades para la evaluación y ejemplos* qui clot en général toute unité, on trouve des exercices pouvant utiliser Pythagore (en oubliant la notion de tangente elle aussi rencontrée dans cette unité), mais jamais dans une tâche simple et isolée. La question reste relativement ouverte et il est conseillé au professeur d'observer comment les élèves investissent (ou non) les connaissances.

Dans l'option mathématiques de 3M, les Dacc proposent encore un retour sur le théorème de Pythagore dans la partie *Profundización en lenguaje algebraico* (fig 4.1)

Le texte ne fournit pas d'hypothèses textuelles, juste des hypothèses codées mais qu'il faut décoder. Il faut en effet *lire* le même triangle rectangle positionné 2 fois *et* un alignement des deux côtés de l'angle droit (obtenu en reliant l'expression trapèze et l'image afférente)

On remarque qu'il s'agit, pour les élèves chiliens spécialistes (équivalent 1ère S) de la démonstration du théorème de Pythagore direct jugée accessible en France 3 ans plus tôt (en 4^e) par les élèves français généralistes.

Conclusion

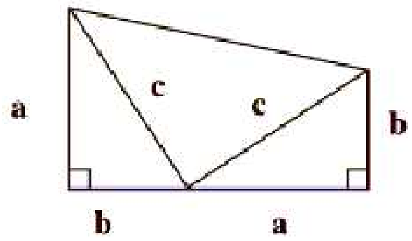
En France, les savoirs géométriques sont d'abord prétexte à des raisonnements contraints, plus précisément à la construction de textes de démonstration et de façon précoce par rapport au Chili. Une importance particulière est accordée au statut des énoncés à l'intérieur

[2]En prenant comme théorie : les mathématiques constituées, donc ici la Géométrie II

[3]Nous utilisons en partie la typologie de Chevallard

Ejemplo B

- De acuerdo al dibujo siguiente demostrar el Teorema de Pitágoras, a partir del área del trapecio expresada de dos formas diferentes.



Observar si:

i) relacionan con el área de un trapecio;

ii) para calcular la suma del área de los tres triángulos, se dan cuenta que es necesario demostrar que el ángulo que forman los lados c es recto;

iii) resuelven sin dificultad los cálculos algebraicos.
Nota: Esta demostración la propuso Abraham Garfield (1831-1881) quien fue presidente de Estados Unidos.

FIG. 4.1 – Le théorème de Pythagore

des textes de démonstrations. Rien dans les Documents officiels ne semble mettre l'accent sur la nécessité d'un temps ou d'activités pour que les élèves s'approprient le contenu du texte du théorème.

Les Dacc chiliens suggèrent différentes modalités de travail pour les élèves et proposent deux types d'activités : celles pour construire et intégrer les connaissances (premières rencontres et exploration), celles pour les utiliser (applications sous formes d'exercices et de problèmes).

Ces textes incitent donc dans un premier temps, à construire le savoir Théorème de Pythagore en généralisant des résultats d'expériences dans deux cadres : cadre des aires sans mesure et cadre numérique (mesure des longueurs pour calculer des aires de triangles, triangulation conseillée pour de polygones réguliers quelconques, éventuellement aidée par Cabri). Ils insistent sur le rôle de l'expérience : ils laissent aux élèves un temps pour émettre une conjecture, puis s'en assurer *al menos para estos casos*. En 7B c'est le professeur qui déclare le caractère général de la conclusion en proposant une démonstration sur les carrés (p143-144). Mais en 3M, c'est l'élève qui est incité à articuler le théorème de Pythagore à celui d'Euclide, réalisant ainsi un îlot déductif.

Ainsi, on peut dire que les Dacc chiliens prennent en compte une progressivité de l'appropriation par les élèves de savoirs géométriques culturels et utiles (7B) avant de revenir sur leur insertion dans les mathématiques théoriques (3M).

Ils ne négligent pas pour autant l'aspect travail de la technique : les textes proposent d'amener les élèves, dans un second temps, à faire fonctionner la connaissance construite pour calculer des longueurs (situations évoquées), vérifier qu'un angle est droit, examiner certains instruments. Certes les problèmes ont pour support la réalité, mais celle-ci est déjà modélisée par un schéma, le niveau de modélisation de départ fait donc que ces situations fonctionnent de fait comme un simple prétexte à l'utilisation du théorème, comme on le verra quasi systématiquement en France. Ces propos (schéma fourni) sont à relativiser en 3M.

4.1.3 Étude de manuels

Niveau 3

Pour tenter de comparer avec ce que propose le *savoir apprêté* en France, regardons des manuels de quatrième. Dans la mesure où il n'existe pas d'activités conseillées officielles, on peut penser que la variabilité des activités proposées dans les manuels français est plus grande que celle des manuels chiliens.

Triangle 4^e Hatier 2002 France

Le manuel propose 15 chapitres dont un intitulé « Théorème de Pythagore » qui occupe 11 pages, exercices exclus. Le sous-titre du chapitre est constitué de la question « Comment des maçons peuvent-ils vérifier qu'un angle est droit en utilisant une corde à treize nœuds ? » mais il n'en est plus question par la suite. Dans chaque Chapitre figurent cinq parties : une Partie Préparatoire dont le but annoncé est de réactiver les notions utiles pour comprendre le nouveau chapitre (que nous n'étudierons pas), une partie Activités qui vise à introduire les nouvelles notions, une partie Connaissances qui institutionnalise *les savoirs* à retenir, une partie Méthodes qui dégage du chapitre *les savoir faire* à retenir et enfin une partie Exercices.

Une première partie (double page 140-141) est intitulée Théorème de Pythagore

Après (paragraphe 1) des exercices de construction effective avec la règle et le compas de triangles rectangles ou de rappel de ce qu'est l'hypoténuse, le théorème est présenté (paragraphe 2) comme une formule connue des mathématiciens depuis 3000 ans, qui relie les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Il est demandé aux élèves de *conjecturer cette formule* à partir de triangles rectangles déjà dessinés et dont les trois longueurs (nombres entiers de cm) sont fournies sur le dessin. Notons qu'à moins de connaître *la formule* il est peu naturel de penser aux carrés de longueurs. Un commentaire indique même que le professeur peut suggérer de calculer les carrés. Aucun dessin ni mesurage n'est demandé aux élèves, la règle graduée est superflue. Bien qu'à support géométrique, cette première rencontre est uniquement numérique.

Le troisième paragraphe (p. 141) qui suit propose une démonstration (dite historique, voir fig 4.1) guidée du théorème qui utilise le calcul de l'aire d'un trapèze rectangle de deux façons différentes. On passe directement à la construction du bloc technologico-théorique sans avoir fait fonctionner le nouveau savoir comme une technique.

Le quatrième paragraphe propose (4a p141) de calculer si possible le troisième côté de triangles dessinés (deux sont rectangles et un non) dont les longueurs de deux côtés sont données en nombres entiers de centimètres (triplets pythagoriciens) sur les dessins. Il n'est jamais suggéré le fait qu'on puisse toujours trouver ces longueurs d'une autre façon (dessin à l'échelle et mesurage). La longueur à calculer est rendue inaccessible non pas par le réel, mais par un effet de contrat contenu dans le verbe calculer. L'espace de travail imposé est explicitement donc GII.

Pourtant dans une deuxième question (4b cf. annexe 2), le tracé d'une figure effective est proposé pour *contrôler la vraisemblance du résultat* : GI est convoqué comme contrôle a posteriori de GII.

Un cinquième paragraphe conforte l'intérêt du dessin (à supposer qu'il soit à l'échelle ce qui n'est pas implicite) pour contrôler d'une certaine façon un calcul.

On recense donc une seule activité de première rencontre, puis un passage vers le bloc technologico-théorique et ensuite des exercices.

Une seconde partie intitulée « Ce triangle est-il rectangle ? » comporte deux paragraphes.

Le paragraphe 6 amène à confronter dessins de triangles et qualificatif de triangle rectangle. Ce qualificatif n'est jamais questionné : il est toujours relié, mais implicitement, au respect de l'égalité de Pythagore et jamais au fait de contrôler par l'équerre que l'angle est droit. Dans sa grande maladresse, cet exercice illustre parfaitement les difficultés dans lesquelles l'absence de toute réflexion sur les paradigmes de travail entraîne les enseignants français, fussent-ils auteurs de manuels :

1. *Être ou ne pas être un triangle rectangle ? (p142)*
   (a) Tracer un triangle MNP tel que $MN = 9,6$ cm. $MP = 4$ cm et $NP = 10,3$ cm. Dire à vue d' œil, si ce triangle est rectangle ou non en M.
   (b) Calculer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 9,6cm et 4cm. Le triangle MNP de la question a) est-il rectangle ?
   (c) Démontrer que les triangles suivants ne sont pas rectangles
   – TIR tel que $TI = 2$ cm, $IR = 2$ cm et $TR = 3$ cm
   – POL tel que $PO = 6$ cm, $OL = 12$ cm et $PL = 9$ cm·

Pour la question b) la seule alternative au perceptif semble être le calcul théorique, les instruments sont évacués, ils n'ont pas l'occasion d'être questionnés dans leur rapport aux mathématiques.

Pour la question c) la construction de l'exercice génère *une méthode : pour contrôler l'absence de qualificatif triangle rectangle, j'applique Pythagore.* Une note pour le professeur met en avant qu'il s'agit d'une utilisation de la contraposée de la directe, ce qui semble bien confirmer l'intention principale des auteurs, préparer à la démonstration et à ses raffinements.

Or TIR est isocèle, s'il etait rectangle, ce serait la moitié d'un carré de côté 2 cm et de diagonale 3 cm. C'est contradictoire par les aires : 4 cm^2 (côté) contre 4,5 cm^2 (diagonale).

Quant aux dessins de POL, ils sont perceptivement des triangles non rectangles.

Dans les deux cas, il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème pour résoudre le problème.

Le paragraphe 7 propose de corriger un texte de démonstration utilisant la réciproque du théorème de Pythagore.

Une troisième partie *Résoudre des problèmes*propose
– de comparer deux façons de répondre à la demande de calcul de la diagonale d'un rectangle 8 sur 6 ;
– de déduire de longueurs connues des longueurs inconnues dans trois cas ; deux liés à des figures géométriques (losange et triangle), un troisième contextualisé sur une maison (schématisation fournie) : a priori, dans chaque cas, un dessin à l'échelle (deux fois en grandeur réelle) suivi d'un mesurage permettrait de conclure ;

– de mettre en rapport triangle dessiné et triangle calculé (*à vue d'œil*)
– de contrôler avec un mètre qu'un angle de *cadre rectangulaire* fabriqué (et schématisé avec ses dimensions) est droit.

On notera toute l'ambiguïté d'un telle demande : les exercices précédents ont développé le fait qu'un triangle, sans angle droit a priori, n'est rectangle que par la relation qui lie ses longueurs. Et on demande ici de contrôler l'angle droit alors que les trois longueurs ne sont pas données, que l'une est à mesurer. En l'absence de la connaissance de deux paradigmes de travail, l'élève ne peut que devenir schizophrène.

La fiche *Connaissances* fait figurer le théorème sous la forme *si...alors* et plus loin sa réciproque avec une mise en garde : *Attention le théorème de Pythagore ne s'applique qu'aux triangles rectangles.*

Les autres activités proposées mettent en contradiction l'allure d'un triangle dessiné et le fait de l'appeler triangle rectangle, demandent de démontrer que des triangles donnés par leurs mesures ne sont pas rectangles, proposent de corriger des textes de démonstration démontrant qu'un triangle est rectangle. Enfin ils demandent de calculer la diagonale d'un rectangle dessiné de dimensions données. Deux objets réels sont évoqués pour une autre demande de calcul, mais le dessin proposé plaque déjà soit un triangle rectangle soit un rectangle côté sur la réalité schématisée.

La fiche Méthodes de fin de chapitre ne propose que des méthodes utiles dans l'espace de la feuille de papier pour contrôler des longueurs de côtés de polygones ou des perpendicularités. Aucune portée pratique n'est suggérée.

Finalement on recense une seule activité de type Première rencontre, aucune activité d'émergence de la technique, 3 activités d'insertion dans la théorie et 11 exercices ou problèmes.

Maths 4^e Magnard 2002

Le manuel propose 14 chapitres dont un intitulé « Théorème de Pythagore » qui occupe 6 pages (exercices exclus). Dans chaque Chapitre figurent quatre parties : une partie *Activités* qui vise à faire le lien avec les classes antérieures et introduire les nouvelles notions (l'équivalent des Activités d'apprentissage de notre document chilien), une partie *L'essentiel du cours* qui dégage ce qui est à retenir, une partie *La démonstration pas à pas* qui donne des *éléments progressifs* sur cette question et enfin une partie *Exercices.*

Dans la série des activités, se trouvent successivement

– le remplissage, grâce à la fonction Longueur de CABRI, d'un tableau à en tête
  $AB \quad AC \quad BC \quad AB^2 \quad AC^2 \quad AB^2+AC^2 \quad BC^2$
  où ABC sont différents triangles rectangles en A avec une conclusion suggérée (ambiguë) : *En conclusion on pourra insister sur l'approximation des mesures et la nécessité d'une preuve pour démontrer.* (marge droite page 90)
  Cette phrase est prétexte à confusion : parce que le mesurage est soumis à encadrement (et donc ne peut donner lieu à des résultats exacts au sens théorique (un unique nombre réel incontesté), il serait nécessaire de démontrer ? La réponse est non, puisqu'un encadrement suffit pour conclure à la validité d'un résultat y compris en Géométrie II. Rappelons que la nécessité de la preuve est liée à la volonté d'avoir un résultat général (quel que soit le triangle rectangle, sans essayer sur tous ET/OU dans la mesure où ils sont infinis : OU BIEN d'avoir un résultat idéalisé, donc non accessible à l'expérience, sans expérience : une validité qui dépasse les faits expérimentaux et finalement s'en passe, même si le résultat naît de ces faits expérimentaux

en tant que conjecture.

– un jeu de puzzle avec trois carrés construits sur les côtés respectifs d'un triangle rectangle et une conclusion sur une relation entre leurs aires ; démarche présentée comme *une preuve, pas une démonstration* ; ce jeu de puzzle est simultanément relié à un exercice (ex 9 p. 96) qui met en évidence qu'un jeu de puzzle peut *avérer* des faits faux (64=65) ;
  on voit le danger de cette juxtaposition : un travail en Géométrie I est réalisé pour inférer une conjecture qui se trouve être vraie, mais l'horizon Géométrie I est aussi convoquée sans autre forme de procès pour inférer une conjecture fausse ! La finesse de l'argument *une preuve, pas une démonstration* risque d'être illisible par beaucoup d'élèves.
– une mise en relation entre les dessins de triangles donnés par leurs trois longueurs et des calculs de type tableau du dessus avec une question *le triangle semble-t-il rectangle ?*, présenté comme *approche de la contraposée* : là encore le dilemme triangle et soumis aux contrôles des instruments et *triangle calculé* est présent.

On voit donc ici trois AER (première rencontre, exploration de la tâche, travail de la technique) MAIS avec la présence implicite du bloc technologico-théorique qui sera pris en charge par la suite.

L'essentiel du cours (page 92-93) cite le Théorème de Pythagore sous la forme « si...alors » ; précise que le théorème permet de calculer une longueur inconnue dans un triangle rectangle ; cite la Réciproque du théorème de Pythagore sous la forme « si...alors » en précisant que " cette réciproque est une propriété qui permet de montrer qu'un triangle est rectangle " ; enfin il mentionne une Propriété permettant de démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle toujours sous la forme « si...alors ». On notera la variété des verbes utilisés : montrer /démontrer, théorème/propriété, et leur polysémie (notamment pour le mot montrer) problématique dans ce cadre.

La démonstration pas à pas propose un exemple de texte de démonstration utilisant entre autres la réciproque du théorème de Pythagore visant une utilisation adaptée de connecteurs (comme, de plus, par conséquent).

Conclusion niveau 3 pour la France

Si dans Triangle 4^e Hatier 2002, l'utilité pratique du théorème de Pythagore n'est que suggérée, elle est totalement absente de Maths 4^e (du moins dans les parties autres qu'Exercices). Par contre dans les deux manuels, le théorème est donné sous ses deux formes, directe et réciproque, bien séparés. Maths propose aussi la contraposée de la directe. C'est ainsi que sous prétexte d'une seule expression, théorème de Pythagore, les manuels proposent deux formes logiques et trois énoncés différents.

Quand la réalité est évoquée dans certains exercices du cours, elle est déjà complètement schématisée de façon à ce que les élèves reconnaissent immédiatement des figures géométriques usuelles : à ce titre la réalité n'est que prétexte à exercices, et Pythagore n'est pas présenté comme une connaissance utile pour les rapports à l'espace.

Le théorème de Pythagore est prétexte à des exercices (explicites) dans GII et à des ruptures (implicites) entre GI et GII, mais sans que la différence de traitement paradigmatique soit suffisamment explicitée.

Concernant Triangle, le théorème de Pythagore n'est fréquenté que dans un cadre numérique (mesures d'aires et de longueurs). Les activités sont exclusivement proposées dans l'espace de la feuille, à partir de dessins schématisés laissant apparaître directement ou en surimpression un triangle rectangle ou un rectangle. Les tâches usuelles sont le plus souvent Calculer ou Démontrer. Le type de traitement souhaité est toujours très orienté : le plus souvent GII est là pour péjorer GI et inciter à se méfier des *apparences*.

Concernant Maths 4^e, le théorème est inféré dans un cadre numérique (sans doute avec une gestion complexe des approximations dues à CABRI), conforté de façon très directive après un jeu de puzzle sur des carrés (sans que le changement de cadres longueurs/aires ne soit commenté), puis proposé sous le nom de théorème. A ce stade l'élève peut, semble-t-il, difficilement voir ce que serait une démonstration, ce qu'elle apporterait de plus. La encore les activités et exercices se limitent à l'espace de la feuille (ou de l'écran d'ordinateur CABRI). Les traitements proposés sont parfois dans GI mais toujours suivis d'une mise en garde.

Dans la mesure où l'étude des manuels nous a engagés sur une transposition *non officielle*, nous faisons le même travail sur un manuel chilien.

Matemática Enseñanza Básica 7 Santiago : Santillana 2001

Le manuel est partagé en 9 unités, de 25 à 30 pages. Le théorème de Pythagore fait partie de l'unité nommée Triangles où il est le 7ème (et dernier) item. L'unité Triangles est introduite par la remarque " la forme du triangle permet d'obtenir, pour chaque type de construction, rigidité et résistance " et la question " Pourquoi le triangle permet il d'obtenir cela ? ". Le théorème de Pythagore n'occupe qu'une double page d'activités

La première page (p156) évoque le problème du charpentier (dessin et photo à l'appui) qui veut savoir si un certain angle est droit et utilise pour cela un triangle en bois 3, 4, 5 : il est dit qu'il utilise " une propriété très ancienne appelée le théorème de Pythagore ". Cette propriété n'est écrite que sous la forme : $3^2 + 4^2 = 5^2$

Puis il est conseillé de chercher de l'information sur le site de l'Université de Santiago du Chili conseillé par les documents officiels (voir plus haut).

La seconde page (p157) propose d'abord par un jeu de puzzle (figures à calquer et découper) sur des triangles équilatéraux ou sur des carrés dessinés sur les côtés d'un triangle rectangle de contrôler que le théorème de Pythagore fonctionne dans les deux cas ; puis de calculer la longueur d'un côté de triangle rectangle quand les deux autres sont données en cm sur un dessin. L'attendu est vraisemblablement l'utilisation de la propriété de Pythagore.

On trouve donc 3 activités de type AER dont un essai d'insertion théorique, mais externe au manuel, la recherche sur Internet, et 2 situations d'application.

Nous avons pu avoir accès à un des livres 7B retenus par la Licitación.

Matemática al dia 7° 2004-2005 Ediciones Cal y Canto

Le manuel est estampillé Ministerio de Educación. Il est distribué gratuitement aux écoles qui le demandent.

L'étude de ce livre prend dans notre étude une place particulière car il est censé donner l'image la plus conforme aux attendus ministériels des tâches assignées aux élèves.

Le livre est partagé en 6 unités de 20 à 30 pages chacune. Ces unités ne reprennent exactement ni le découpage ni les titres conseillés par les Dacc.

Le théorème de Pythagore se rencontre à deux endroits : une première fois sans être nommé dans l'unité *Geometría, figuras y cuerpos geométricos* à l'occasion de l'étude des triangles plus particulièrement des triangles rectangles ; une seconde fois dans l'unité *Potencias numéricas y geométricas* sous son nom *Teorema de Pitágoras.*

Première rencontre avec le théorème de Pythagore (page 112) dans ce livre, le thème Triangles vise successivement la construction de triangles à la règle et au compas, la dénomination de triangles (selon les angles et pour les isocèles et les équilatéraux selon les longueurs et/ou les angles particuliers), l'utilisation du rapporteur, le constat que la somme des angles (intérieurs) d'un triangle égale 180°. Dans cet ensemble se pose la question des longueurs des côtés d'un triangle rectangle : une activité de traçage de triangles rectangles sur papier quadrillé (avec les côtés de l'angle droit (a et b) qui ont une longueur égale à un nombre entier de carreaux) aide à remplir un tableau mettant en relation les deux colonnes a^2+b^2 et la longueur de l'hypoténuse. Le décalage dû aux mesurages n'est ni mentionné ni a fortiori questionné. Il est conseillé de dessiner un triangle non rectangle pour constater la non égalité des carrés des longueurs *ad hoc.*

Enfin le théorème est mentionné sous la forme suivante : *dans un triangle la somme des carrés des côtés de l'angle droit est équivalente au carré de l'hypoténuse* accolé à un dessin représentant un découpage dont il est dit qu'il représente graphiquement la preuve du théorème. Le changement de point de vue sur a^2, voire de cadre (passage des carrés des longueurs – numérique – aux aires – grandeurs –) n'est pas mentionné, a fortiori questionné.

On trouve ainsi 2 activités de première rencontre et/ou exploration de la tâche, ainsi que 3 applications dont la description suit.

La première consiste à repérer dans trois triangles rectangles où se situe l'hypoténuse. La seconde basée sur 3 dessins de triangles, en apparence rectangles et dont les 3 longueurs sont fournies, propose de vérifier, moyennant l'équation $a^2 + b^2 = c^2$ si chaque triangle est rectangle. La troisième demande de chercher la longueur inconnue pour 3 triangles rectangles dont 2 longueurs sont données et l'angle droit avéré par le code usuel (la méthode là n'est pas indiquée).

La seconde rencontre se présente comme un travail de recherche en groupe et reliée à la culture égyptienne.

La première question invite à retrouver dans un réseau carrés et diagonales la figure prototypique associée au théorème de Pythagore, puis à retrouver par découpage une relation entre les carrés des longueurs cette fois ci matérialisés par des aires. Le triangle de référence est rectangle ET isocèle.

La seconde question *Se passe-t-il la même chose pour tous les triangles ?* invite à construire des carrés sur les côtés de 3 triangles (dont les longueurs sont de nombres entiers de cm) l'un rectangle, les deux autres non.

La troisième question invite à généraliser, par deux découpages fournis (et donnés à découper en fin de livre), la relation à d'autres triangles que celui rectangle isocèle de départ.

La dernière question invite à généraliser la relation sur les aires construites autour d'un triangle rectangle à d'autres polygones réguliers : triangles équilatéraux et hexagones réguliers ; là encore les pièces à découper sont fournies en fin de livre.

La conclusion finale consiste à comparer les résultats des recherches de chaque groupe et *à écrire en commun pour le théorème ainsi prouvé.*

On a bien là encore 4 AER de type exploration de la tâche, émergence de la technique et premières constructions de la technologie.

Suivent une nouvelle activité d'exploration qui cette fois fait mettre en relation, sous forme d'un tableau numérique, les aires des carrés (elle correspondrait au changement de cadre dont nous avions déploré l'absence plus haut) ; un résumé de ce que dit le théorème de Pythagore et son utilité (connaître la troisième longueur d'un triangle rectangle dont les 2 autres sont connues) ; 3 activités d'application directe, basées sur des évocations de la réalité : diagonale donnée d'un écran de télévision dont il faut trouver les dimensions, corde à 12 nœuds des Egyptiens (mentionnée dans les Dacc), optimisation d'un trajet (dessiné sur un plan).

En conclusion dans ce livre on trouve, pour le théorème de Pythagore (direct) 7 AER et 6 applications. On aura pointé la reprise d'activités mentionnées dans les Dacc.

Conclusion niveau 3 pour le Chili

Pour les deux manuels

Le théorème de Pythagore est présenté comme savoir culturel et social, c'est une caractéristique du triangle rectangle (sans réflexion explicite sur le sens de l'implication en jeu). Il n'y a donc pas de distinction entre directe et réciproque. La 'directe' est inférée à partir de relations entre des aires matérialisées, par des superpositions de puzzles ou des complétions de tableaux numériques (carrés de longueurs).

Le nombre d'activités consacrées à l'appropriation du théorème et à la construction d'une technologie *pratique* est conséquent.

Dans les situations d'application, le théorème est toujours présenté comme un moyen de calculer une longueur sans mise en relation avec la possibilité de trouver cette longueur par un autre moyen.

Le théorème de Pythagore est support d'exercices dans G I, même si une résolution dans GII est induite : production par le calcul de longueurs inconnues. Il est plutôt présenté comme une connaissance utile : obtenir un angle droit, une 3^e longueur non donnée (même s'il existe d'autres moyens).

Dans Matemática 7 Santillana 2001, le théorème est peu exploré, le texte complet du savoir n'est pas cité, le manuel envoie au site de la toile.

L'utilité pratique de la *réciproque* est révélée (outil du charpentier), non travaillée effectivement. Il n'y a pas de jeu de cadres entre le numérique (mesure de longueurs) et les aires.

Dans Matemática al dia 7° Cal y Canto 2004-05, le théorème (direct) est très exploré, sa contraposée l'est un peu ; le texte complet du savoir est cité plusieurs fois. Une de ses utilités pratiques est même explicitement mentionnée.

Les situations d'exploration sont nombreuses, plus que celles d'application.

La réciproque de Pythagore est rencontrée implicitement par l'utilisation de la corde à nœuds, comme instrument de contrôle d'un angle droit.

4.1.4 Conclusion de l'étude

Le théorème de Pythagore se rencontre dans les programmes en France comme au Chili. Il est vu un an plus tôt au Chili.

Au Chili il est présenté et enseigné comme une équivalence implicite, en France les programmes demandent que soient distingués directe et réciproque. Cette injonction est bien suivie par les manuels qui envisagent même la contraposée de la directe.

Les activités proposées par les documents d'accompagnement et manuels chiliens visent à construire la connaissance dans différents contextes, puis à l'utiliser ; en France au contraire, les manuels s'intéressent rapidement à la démonstration puis font utiliser le théorème dans des applications.

Le théorème est repris par la suite en Seconde en France pour des démonstrations par les aires, il est régulièrement utilisé en tant qu'outil dans des exercices variés. Au Chili, il est explicitement retravaillé en 3M, (équivalent de 1ère). Il est à ce niveau plongé dans l'univers de Géométrie II, sans que la connaissance des élèves soit totalement exigée à ce niveau théorique.

Dans aucun des pays ne sont questionnés, ni les changements de cadre entre longueurs (au carré) et aires, ni la gestion des approximations liées aux mesurages qui servent à conjecturer le théorème. Le changement de statut du dessin, en fonction du changement d'horizon théorique, Géométrie I ou Géométrie II, n'est pas non plus questionné dans les documents destinés au professeur au Chili ou dans les conseils des manuels en France.

Au Chili, ce que nous pourrons appeler " progression sur la plausibilité " est pris en compte dans les Dacc comme dans le manuel " licité " : une conjecture " locale " d'abord sur un type de triangle (rectangle isocèle), devient une conjecture " générale " pour n'importe quel triangle rectangle, la validité de cette conjecture pour d'autres types de triangles est ensuite interrogée. Les textes insistent sur le statut du théorème à ce niveau (conjecture) : on pourrait aussi analyser ces choix comme un essai de progressivité de type preuves pragmatiques vers preuves intellectuelles (Balacheff 1987) ou plausibilité versus nécessité (Cabassut 2005), dont aucune trace n'apparaît en France.

En résumé, cette étude du théorème de Pythagore laisse apparaître que les Espaces de Travail Géométriques institutionnels des deux pays sont différents, notamment par l'horizon visé.

En France, contrairement au Chili, la connaissance géométrique semble n'avoir d'existence qu'insérée dans un corpus théorique. Les applications pratiques sont subalternes, réduites à des prétextes à faire fonctionner de courtes démonstrations utilisant directe ou réciproque du théorème. La Géométrie II est le but visé, elle devient aussi le moyen. Le bloc technologico-théorique reste dominant à tous les niveaux de la scolarité.

Au Chili, la connaissance géométrique est d'abord et essentiellement insérée dans une culture, la Géométrie I est le but visé du moins en 7B. L'insertion dans la Géométrie II se fait sur ce sujet en 3M, mais la Géométrie I ne semble jamais niée ni péjorée. Ces deux horizons co-habitent . Cette étude confirme donc les analyses réalisées dans le chapitre précédent.

4.2 Aire et périmètre du disque

Dans le prolongement de l'étude précédente, nous nous intéresserons plus particulièrement dans ce travail au processus par lequel les élèves sont mis en contact avec les résultats relatifs au périmètre et à l'aire du disque. Par ailleurs, le cercle est un objet propice à la confrontation d'un point de vue idéel (le cercle est toujours arrondi, il n'est jamais confondu avec un polygone, aussi grand que soit le nombre de sommets de celui-ci) et d'un point de vue matériel (vu « de très près », un arc de cercle représenté sur une feuille est confondu avec sa tangente ; avec un logiciel de géométrie dynamique, le polygone régulier de nombre de sommets maximum ne se distingue pas de son cercle circonscrit). Cette étude nous permettra donc de revenir sur l'analyse de l'Espace de Travail Géométrique.

4.2.1 Approche chilienne

Programmes

Le thème étudié ici est abordé en 8B.
Octavo Año Básico
Objetivos fundamentales

> 7. Analizar y anticipar los efectos en la forma, el perímetro, el área y el volumen de figuras y cuerpos geométricos al introducir variaciones en alguno(s) de sus elementos (lados, ángulos).
> 8. Reconocer las dificultades propias de la medición de curvas y utilizar modelos geométricos para el cálculo de medidas.

Unidades, contenidos y distribución temporal : cuadro sinóptico
Unidad 1 : Polígonos, circunferencias, áreas y perímetros

– Análisis de los elementos de una circunferencia (radio, diámetro) en la reproducción y creación de circunferencias con regla y compás.
– Experimentación de diversos procedimientos (gráficos y concretos) para medir el perímetro y el área de circunferencias.
– Significado geométrico y numérico del número π.
– Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo de perímetro y área de circunferencia.
– Uso de aproximaciones convenientes para números decimales infinitos.

On voit que cette unité présente simultanément un regard analytique sur le cercle avec les notions de centre et rayon, un travail expérimental autour des formules du périmètre et de l'aire du cercle, enfin une réflexion sur les nombres idécimaux dont π. C'est ainsi qu'on peut lire dans les Orientaciones didácticas :

> "A partir de las relaciones entre diámetro y perímetro de una circunferencia se visualiza el número pi (π). Es decir, se puede visualizar este número irracional particular a partir de experiencias geométricas y numéricas. Y, en este contexto, se abordan los números decimales infinitos, llamados, también, irracionales") p. 19

Activités des Documents d'accompagnement (Dacc)

Quatre activités centrées sur le cercle sont présentées.

L'*Activité 4* (p. 38) vise à mettre en avant l'importance du centre, du rayon et du diamètre comme éléments caractéristiques du cercle. Elle comprend une reproduction au compas d'un dessin complexe formé de cercles, le tracé d'un cercle trop grand pour être réalisé au compas, donc avec une ficelle. La troisième tâche vise à faire chercher le centre d'un cercle réalisé grâce à une assiette. Le commentaire est le suivant :

> "El trabajo con papel es muy interesante pues permite establecer por plegado el centro de la circunferencia y queda claramente establecido que el diámetro es eje de simetría de la misma, además de comprobar que todos los pliegues que coinciden con el diámetro son de igual longitud."

On suggère enfin que les élèves se livrent à des recherches auprès d'artisans (menuisier, marqueur de terrains - marcador de canchas) pour savoir pourquoi ils sont amenés à tracer des circonférences et comment ils procèdent (exemple d'une table).

L'*Activité 5* correspond aux objectifs suivants :

> " A partir de situaciones asocian el perímetro de una circunferencia a la medida del contorno y del área como medidad de la superficie de la misma. Hacen estimaciones. Analizan la dificultad que involucra la medición." p. 39

Un exemple de tâche relatif au périmètre est le suivant :

> " Se están confeccionando manteles y centros de mesa en forma de círculo. Cada uno lleva cinta en el borde. Se desea saber en la forma más precisa posible cuántos metros de cinta y género se requieren para cada uno."

Pour l'aire, on trouve les propositions suivantes :

> " Trazan modelos de posa vasos de forma circular que tengan de diámetro 10 cm y 11 cm. Buscan formas de calcular la superficie que cubre cada uno. Se pueden apoyar en cuadriculados de 1 cm de lado o en papel milimetrado."
>
> " Distribuidos en grupos, hacen un molde en papel para posa vasos y buscan formas de medir el contorno y la superficie de cada uno. [...]
>
> Presentan algunos procedimientos usados en esta y comparan las medidas. Comentan la dificuldad para obtenerla, las diferencias entre las medidas presentadas y reflexionan sobre las posibles causas. Ubican el valor de la medida entre ciertos rangos."

Le commentaire associé à ces tâches dans lesquelles les élèves ont à effectuer eux-mêmes des mesures dans un environnement matériel est le suivant[4] :

> " En la primera parte de la actividad la idea es que los estudiantes recurran a procedimientos de medicíon como ubicar una cuerda por el contorno de la circunferencia y, en el caso del área, cuadricular la superficie con cuadrados de distintas medidas para ajustar el cálculo. En este segundo caso, es importante que se den cuenta que cuanto más pequeño es el cuadriculado, más exacta es la medicíon. [...]. La reflexión en torno a la dificuldad para encontrar un valor exacto de la medida está centrada en darse cuenta que es una medida con cifras infinitas y aunque se vizualiza perfectamente (se ve en el trozo de cuerda) no se puede expresar a través de un número decimal, sino que representa un número irracional."

Ce passage montre le souci d'aborder explicitement la question de l'idécimalité (identifiée à irrationnalité) de la mesure. Mais on y rencontre une certaine confusion entre approximation inhérente au mesurage (seule explication de la variation des résultats dans le cas du périmètre), approximation due à la non coïncidence entre l'objet mesuré et l'objet dont la mesure est visée (vraisemblablement perceptible dans le cas du calcul d'aire), approximation due au caractère décimal des mesures *mesurées* et à l'idécimalité de la mesure exacte. Il semble que l'on cherche à fonder l'idécimalité de la mesure exacte sur l'existence d'une différence toujours non nulle entre la mesure accessible, décimale, et la mesure visée. Ceci est un présupposé mathématiquement erroné : une suite de nombres décimaux peut converger vers un décimal, sans jamais l'atteindre $(1 + 10^{-n})$. Ceci dit, ce point de vue

[4]Nous reprenons ici les analyses déjà formulées dans la partie consacrée à l'étude longitudinale de l'espace du travail géométrique au Chili.

présente certains intérêts du point de vue didactique, à condition toutefois d'aborder explicitement la question de la non-coïncidence entre le cercle et tout polygone inscrit. Seule une conception intellectuelle de la courbure du cercle est en mesure de fonder une telle affirmation ; ainsi cette unité peut donner lieu à un changement de paradigme géométrique. Mais les instructions restent très allusives sur ce point extrêmement délicat.

Par ailleurs, le fait que l'acte de mesurer ne conduise pas à une mesure qui puisse être qualifiée d'exacte, comme les Physiciens le savent bien, semble ignoré, c'est une constante qui n'est que tardivement remis en cause (voir les applications de l'unité sur les triangles semblables en 2M). On retrouve ce problème dans l'activité suivante.

L'*Activité 6* est une exploration de la relation entre périmètre et rayon du cercle. Elle doit conduire à une définition du nombre pi.

On s'intéresse au principe de fonctionnement des odomètres (ruedas métricas). Il est demandé aux élèves de déterminer (pas de précision sur le procédé effectif de mesure) la distance parcourue en un tour par des roues en carton de 20 cm, 30 cm et 40 cm de diamètre. Ceci débouche sur un tableau et l'on fait calculer le quotient périmètre/diamètre. Les commentaires donnent un tableau dans lequel le quotient vaut dans tous les cas 3.1, éventualité totalement irréaliste. Rien n'est dit pour préparer le professeur au fait que les élèves n'obtiendront certainement pas les mêmes valeurs pour les différentes roues ni les mêmes valeurs entre eux. Il y a une phrase sur la question de l'approximation mais elle confond, comme dans l'activité précédente, erreur de mesure et irrationnalité :

> "Si analizan las filas se daran cuenta que la relacion entre el diámetro de la rueda y lo que ella recorre es aproximadamente 3 veces mayor.
>
> La presencia de este número surge después de este ánalisis (analyse du tableau des mesures et de la constance du quotient) y de la experiencia obtenida en la actividad anterior [activité 5] en cuanto a su inexactitud." p. 41

Cette activité aboutit à la formule $p = \pi d$ qui est utilisée pour traiter des questions concernant un odomètre. Par exemple :

> "De qué radio escogerías construir una rueda métrica de manera que sea eficiente para medir distancias en una parcuela y sea de facil lectura en la cantitad de metros que va midiendo ? " p. 42

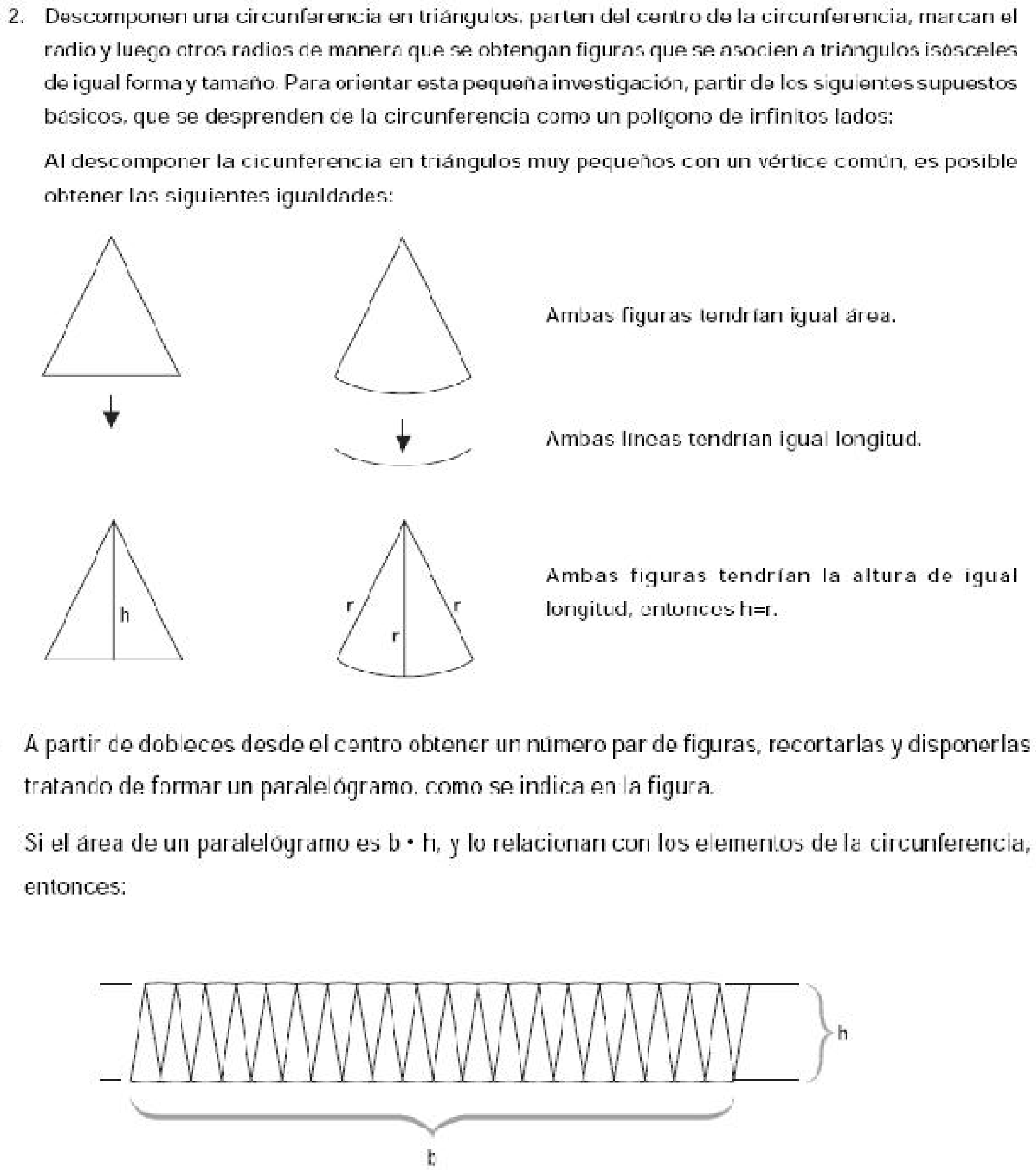
On revient donc à une problématique très concrète.

L'*Activité 7* est centrée sur l'étude de la relation entre l'aire du disque et l'aire de polygones réguliers inscrits et circonscrits. Le but est d'établir la relation entre aire et rayon par le biais de la proportionnalité de l'aire et du périmètre.

Une suite de questions conduit les élèves à établir la relation liant l'aire d'un polygone régulier et la hauteur des triangles congruents qui le composent ($a = \frac{ph}{2}$). La relation cherchée en découle dès lors que les élèves auront été conduits à considérer que le cercle est un polygone ayant une infinité de côtés :

> "Si la circunferencia, como ya se habia visto, puede ser un polígono de infinitos lados, imaginen y tracen un dibujo esquemático de una circunferencia descompuesta a partir de su centro en triángulos muy pequeños, todos de igual forma y tamaño." p. 43
>
> Comentario
>
> " En la segunda parte de la actividad, en la cual se relaciona el área del circulo con la de cualquier polígono regular, es muy importante que realicen el dibujo esquemático que se pide y visualicen que el radio del la circunferencia corresponde a la altura de estos infinitos y angostros triángulos. " p. 44

Une seconde façon de justifier la relation entre aire et périmètre du cercle est inspirée d'une méthode chinoise : les secteurs angulaires qui pavent le disque sont associés *tête bêche* deux par deux pour former des *presque parallélogrammes* dont la réunion a même aire que le disque. Le passage à l'infini permet d'obtenir un véritable parallélogramme dont la base est la moitié du périmètre du cercle et la hauteur le rayon.



2. Descomponen una circunferencia en triángulos, parten del centro de la circunferencia, marcan el radio y luego otros radios de manera que se obtengan figuras que se asocien a triángulos isósceles de igual forma y tamaño. Para orientar esta pequeña investigación, partir de los siguientes supuestos básicos, que se desprenden de la circunferencia como un polígono de infinitos lados:

Al descomponer la cicunferencia en triángulos muy pequeños con un vértice común, es posible obtener las siguientes igualdades:

Ambas figuras tendrían igual área.

Ambas líneas tendrían igual longitud.

Ambas figuras tendrían la altura de igual longitud, entonces h=r.

h

r r r

- A partir de dobleces desde el centro obtener un número par de figuras, recortarlas y disponerlas tratando de formar un paralelógramo, como se indica en la figura.

Si el área de un paralelógramo es b • h, y lo relacionan con los elementos de la circunferencia, entonces:

h

b

Fig. 4.2 – Aire d'un disque. Octavo Año Básico Educación matemática Ministerio de Educación p. 45-46

L'activité se conclut ainsi :

" ¿A que corresponde la base ? ¿ A que parte del perimétro de la circunferencia ?
¿A que elemento de la circunferencia corresponde la altura ?
Escriben la fórmula en función de los elementos de la circunferencia.
Comentario

Se espera que, al igual que en el ejemplo anterior, remplacen los elementos de la fórmula del paralelógramo por los de la circunferencia. Pedir a sus alumnas y alumnos que lo expresen con palabras y luego realicen la traducción a simbolos.

$b \cdot h$ es lo mismo que la mitad del perimetro de la circunferencia por el radio de la misma, entonces $b \cdot h = \dfrac{2\pi r \cdot r}{2}$

Se sugiere pedir que comparen esta fórmula con la tradicional πr^2 y establecer conclusiones respecte a la veracidad de la igualdad."

Fin de l'activité sur l'aire pp. 45-46

Dans quel paradigme se situe cette approche ? On peut considérer que le recours à l'idée d'infini, même non formalisé au niveau du raisonnement, marque un passage à GII : en effet un cercle de GI coïncide avec un polygone ayant un nombre assez grand de côtés (par exemple, lorsqu'un logiciel de géométrie dessine un polygone ayant le plus grand nombre possible dans ce micromonde de sommets, le résultat ne se distingue pas d'un cercle) ; la nécessité d'envisager (nécessairement mentalement) un passage à l'infini n'est donc justifiée que si l'on conçoit le cercle comme toujours différent d'un polygone. Toutefois ce changement de point de vue reste implicite.

L'*Activité 8* propose plusieurs tâches visant à faire utiliser les formules établies : recherche de la forme donnant une aire maximale pour un périmètre donné, étude de l'effet des variations du rayon sur l'aire et le périmètre, calcul de la longueur de l'orbite de la terre autour du soleil, calcul du périmètre d'un cercle connaissant les dimensions d'un rectangle inscrit dans ce cercle (nécessite une application du théorème de Pythagore, vu en 7B ; l'énoncé ne contient pas d'indication sur ce point), étude d'une situation de proportionnalité entre les aires de couronnes emboîtées (conception d'une cible de tir), calcul d'aire de figures complexes. Comme on le constate régulièrement, ces propositions d'activités de réinvestissement sont complexes et parfois ouvertes.

Conclusion

Dans la classe de 8B, une unité regroupe différentes connaissances relatives au cercle : définition en terme de centre et rayon, notion de périmètre et d'aire dans ce cas particulier d'une surface délimité par un contour courbe, formules du périmètre et de l'aire. Ceci conduit à l'introduction du nombre π dont l'idécimalité est abordée à partir de l'impossibilité de déterminer exactement l'aire du disque par quadrillage. Sans aucune exception, les connaissances citées sont l'objet de situations dans lesquelles l'activité des élèves est a priori fortement sollicitée. En particulier, les élèves sont impliqués dans l'invention et la réalisation de processus d'estimation du périmètre et de l'aire ; la formule du périmètre est étayée par la constatation d'une certaine invariance des quotients p/d, p et d étant obtenus par mesurage. Celle de l'aire s'appuie sur l'obtention de la proportionnalité de l'aire et du périmètre à partir de la propriété analogue des polygones réguliers, le cercle étant considéré comme un polygone " infini " ; une seconde justification est proposée qui rappelle une méthode chinoise de découpage et recomposition.

Certaines des activités supposent que les élèves prennent des mesures ; aucune réflexion ne porte sur les difficultés inhérentes à l'imprécision des mesures au moment de la formulation d'une relation (travail sur la proportionnalité Périmètre/Diamètre).

Cette unité peut être le lieu d'une prise de conscience de la différence entre les dessins matériels de GI et les objets abstraits de GII. En effet, l'idée que le cercle n'est à aucun moment confondu avec un polygone inscrit pourrait apparaître dans le travail sur la détermination de l'aire, cette intuition s'appuyant sur celle de la courbure du cercle. Mais ce nouveau point de vue n'est pas explicité, l'occasion de travailler explicitement sur un changement de paradigme n'est pas saisie.

Conformément aux orientations générales, les activités proposées cherchent à impliquer les élèves dans les recherches proposées, avec notamment des travaux par groupes ou par paires.

Les Manuels

Nous avons examiné deux manuels ayant reçu récemment l'agrément ministériel (Arrayán, agréé pour 2005-2006 ; Mare Nostrum, agréé pour 2002) et un manuel non agréé Santillana 2003.

Dans le premier, les travaux sur le cercle sont intégrés dans la première unité *Polígonos, circunferencias, áreas y perímetros*. 10 pages sont consacrées au cercle, reprenant la plupart des situations proposées dans les Dacc. Nous retiendrons cependant que le travail sur la détermination de la formule de l'aire à partir de la relation entre aire et périmètre des polygones réguliers n'est pas repris, c'est la seconde méthode suggérée dans les textes qui est proposée. Par ailleurs, le caractère approximatif de la valeur trouvée pour pi et la nature idécimale de ce nombre ne sont l'objet d'aucune réflexion spécifique à ce moment de la progression. Seul un petit encart intitulé *Conexiones con la historia* fait référence à diverses valeurs fractionnaires et décimales (3.14084507... par exemple, les pointillés n'étant l'objet d'aucun commentaire).

L'unité suivante *Números y ecuaciones* aborde la question des développements décimaux infinis et des approximations. Le nombre pi n'apparaît à aucun moment dans cette unité.

Le Mare Nostrum consacre sa troisième unité au thème *Polígonos, circunferencias, áreas y perímetros*. Le travail sur le cercle occupe 10 pages et demi. Les situations proposées sont à nouveau très inspirées des textes ministériels. Ce manuel aborde la question de l'aire à la fois par les polygones (plusieurs types de polygones sont utilisés pour obtenir des estimations de l'aire d'un disque de rayon 5 cm) puis par la seconde méthode qui permet de justifier la formule générale. Quelques lignes sont consacrées à pi :

> "Este cuociente corresponde al número irracional π, decimal infinito no periódico, para el cual desde la antigüedad, se ha dado diferentes aproximaciones útiles para trabajar en cálculos : 3 por los hebreos, 3.16 los egipcios y 3.14 por los griegos. " (p. 107)

Mais l'idécimalité de π n'est pas mise en relation comme le suggèrent les textes officiels avec la question de la détermination des mesures.

Ce livre ne traite pas de la question des développements décimaux infinis.

Notons que de nombreuses activités de groupes ou par deux sont proposées dans les deux manuels. Un examen rapide nous conduit à affirmer que l'énoncé des tâches est en général assez guidé. Mais ce point nécessiterait une étude plus approfondie.

A l'opposé de ces deux manuels dans l'ensemble fidèles aux suggestions ministérielles, ce qui explique qu'ils aient reçu l'agrément officiel, le manuel édité par les éditions Santillana ne consacrent que 4 pages au thème du cercle dans l'unité 6 *Medición*.

La question du périmètre est introduite par un texte sans qu'aucune mise en activité des élèves ne soit envisagée : un hexagone régulier est inscrit dans un cercle, on en déduit que le quotient entre périmètre et diamètre est supérieur à 3 ; puis on affirme qu'avec un polygone régulier à 20 côtés, on obtiendrait une meilleure valeur approchée de π en suivant la même méthode : " nos acercaremos más al valor de $\pi = 3.1415$ ". La proportionnalité entre périmètre et diamètre est considérée comme allant de soi.

Le manuel institutionnalise alors que

> " la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia recibe el nombre de π y su valor aproximado es 3.14. La longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por .
>
> Perímetro = π.diámetro "

On passe ensuite à des exercices d'application (calcul de périmètre, rayon connu, et inversement du rayon, le périmètre étant connu, variation de la nature du nombre et de l'unité). Notons que dans l'énoncé de ces exercices, on peut lire l'égalité suivante : $\pi = 3.14$, c'est-à-dire que sans aucune réflexion sur ce point, le nombre est égalé à un décimal. Suivent deux exercices portant sur le périmètre de secteurs angulaires (formule du périmètre suivant le nombre de divisions de la circonférence, applications numériques) puis deux sur le périmètre de couronnes.

La structure des deux pages consacrées à l'aire est identique. L'introduction reprend la méthode chinoise (seconde méthode suggérée par les Dacc). On se situe dans le cas d'un découpage en 8 secteurs ; on dit que la figure formée par recomposition est un parallélogramme puis que sa hauteur s'approche du rayon du cercle et que la longueur de sa base est proche de la moitié du périmètre du cercle. Le manuel écrit alors : $b.h = \pi r.r = \pi r^2$, c'est-à-dire qu'il se permet de remplacer une approximation par une égalité.

Suivent, sans aucune remarque supplémentaire, les exercices d'applications exactement de même type que pour le périmètre.

Bien qu'une unité antérieure porte sur les *Decimales finites y infinites*, rien n'est dit sur la nature de π qui, nous l'avons vu est au contraire identifié à 3.14.

Conclusion

Nous retiendrons que les manuels agréés reprennent assez fidèlement les suggestions ministérielles à un point prêt, celui de la nature idécimale de π qui pourrait donner lieu à une certaine ouverture sur le caractère idéal des objets traités en mathématiques. Cette possibilité, envisagée dans une certaine confusion par les Dacc, n'est pas reprise.

Le manuel non agréé que nous avons examiné ne s'inscrit pas dans la perspective de construction des connaissances prônée par les instructions ministérielles ; le thème étudié ici est très rapidement traité, les élèves étant seulement sollicités pour des exercices d'application des formules.

4.2.2 Approche française

Programmes

A l'école élémentaire, la formule du périmètre du cercle figure au programme de la dernière année de cycle 3 jusqu'en 2003-2004. Depuis 2004-2005, les textes précisent qu'on n'aborde pas la formule donnant le périmètre mais que divers travaux peuvent donner lieu à une rencontre avec la proportionnalité du périmètre et du diamètre.

Au collège, nous analysons les programmes en vigueur jusqu'en 2004-2005, l'année 2005-2006 étant marquée par un changement du programme de Sixième.

Sixième :

1. Travaux géométriques

Les notions de centre, rayon et diamètre ont été abordées au cycle 3 de l'Ecole Elémentaire.

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
1.2. Surfaces planes : mesure, comparaison et calcul d'aires et de périmètres	Déterminer l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple. Comparer des périmètres, comparer des aires. Calculer l'aire et le périmètre d'un rectangle. Évaluer à partir du rectangle, l'aire d'un triangle rectangle. Calculer la longueur d'un cercle	On pourra faire déterminer des aires à l'aide, soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillage et d'encadrements. Ces travaux permettront de retenir sous forme d'images mentales, le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme, et de mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle. On pourra s'appuyer sur ces travaux qui donnent du sens à la notion d'aire pour constituer et utiliser un formulaire. Cette utilisation pourra être liée aux unités usuelles et aux changements d'unité.

Au plan numérique, les travaux portent sur les nombres entiers et décimaux.

On aborde la division décimale dans le cas de la division d'un décimal par un entier ; dans ce cadre, les élèves doivent savoir « prendre l'arrondi à l'unité ou la troncature ».

L'écriture fractionnaire du quotient de deux entiers puis de deux décimaux constitue une deuxième rubrique. Si les élèves doivent savoir « pour les décimaux courants, passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa », à aucun moment, la question de l'existence d'une écriture décimale d'une fraction n'est abordée par les textes, y compris dans les commentaires d'accompagnement.

Cinquième :

A.Travaux géométriques

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
4. Cercle Aire du disque	Calculer l'aire d'un disque de rayon donné	

Les travaux numériques visent dans cette classe à approfondir « le travail engagé en classe de 6^e (division, enchaînement des opérations). La maîtrise des quatre opérations sur les décimaux relatifs est exigible en classe de 4^e. » (Accompagnement, p.62). La question de l'idécimalité n'apparaît à aucun moment, pas même en 4^e où pourtant sont introduits les racines carrées pour conclure (grâce à la calculatrice) les applications du théorème de Pythagore et le cosinus.

Dans le programme de 3^e, on trouve dans la rubrique B.Travaux numériques, 4. Nombres entiers et rationnels, une référence à π :

> « A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché. »

Les textes d'accompagnement n'abordent à aucun moment les notions d'aire et de périmètre, pas même dans le cas du cercle. On y rencontre une seule allusion à π qui se situe dans les commentaires du programme de 3^e :

> « La synthèse sur les nombres rencontrés au collège permet par ailleurs de donner un nouvel éclairage sur les nombres rationnels, en mettant en évidence que tous les nombres ne sont pas rationnels. Le nombre π en est bien sûr un exemple, mais ce sont

> surtout les nombres qui ne peuvent pas être exprimés exactement autrement qu'en utilisant le symbole $\surd$ qui en sont la meilleure illustration. » p. 95

Autrement dit, π est banalisé car il est introduit très précocement en géométrie, à un moment où la progression numérique ne s'intéresse pas à la question du développement décimal quand il est illimité.

Le périmètre du cercle dans les manuels de CM2

Nous avons analysé les manuels suivants qui constituent un échantillon représentatif des manuels les plus utilisés : *J'apprends les maths CM2 (Retz, 2002) ; Le nouveau Math Elem CM2 (Belin, 2001) ; Objectif Calcul CM2 (Hatier, 2001).*

J'apprends les maths CM2

Une activité intitulée *Je découvre* consiste dans une première phase à faire mesurer le périmètre de 6 cercles de diamètre variant de 1 cm en 1 cm de 2 à 8 cm. La méthode consiste à utiliser des bandes de papier.

On demande ensuite aux élèves de présenter les résultats sous forme de tableau et un jeu de questions les conduit à observer les variations du périmètre entre deux valeurs consécutives du diamètre. Cette phase se conclut par une prévision du périmètre d'un cercle de diamètre 1cm, avec vérification a posteriori par mesurage. Les conseils donnés au professeur dans le manuel qui leur est destiné les incitent à orienter les observations vers la recherche d'une relation du type *le périmètre est environ 3 fois plus grand que le diamètre.*

La deuxième phase de l'activité énonce alors une règle plus précise :

> En fait, pour un diamètre de 1cm, le périmètre est approximativement de 3,14 cm ; pour un diamètre de 2 cm, le périmètre est approximativement de 2 fois 3,14 cm ...

Il est alors demandé aux élèves de compléter cette fois par calcul un tableau donnant les valeurs du périmètre pour les diamètres envisagés dans la phase 1 puis de comparer les tableaux mesures/calculs en essayant d'expliquer les différences.

Si les variations des mesures entre les élèves sont commentées dans le livre du maître (elles sont attribuées aux imprécisions de mesurage), les écarts entre mesures et calculs ne sont l'objet d'aucune réflexion, on peut penser qu'elles sont attribuées d'une part aux erreurs de mesurage, d'autre part au fait annoncé par le maître que 3,14 n'est qu'une approximation.

Le livre du maître suggère de clore l'activité de la façon suivante qui n'apparaît pas dans le livre de l'élève :

> Sur divers objets (boîte de conserve, boîte à camembert, casseroles, pots de fleurs...) que l'enseignant a apportés, on effectue d'abord une mesure du diamètre, puis le calcul du périmètre, enfin la mesure du périmètre avec du fil non élastique pour vérifier l'anticipation faite avec le calcul.

La rubrique *J'ai appris* se présente de la façon suivante :

> Le périmètre du cercle est proportionnel à son diamètre
>
> A chaque fois que le diamètre augmente de 1cm, le périmètre augmente d'un nombre de cm qu'on note π (il se lit pi).
>
> Au milliardième près, $\pi = 3,141592654$. Le plus souvent, on utilise $\pi = 3,14$ [...]

Sur le nombre π, le livre du maître précise que l'enseignant peut ajouter que ce nombre n'est ni un décimal ni une fraction.

L'unité se termine par quatre exercices d'application dans lesquels l'élève n'a aucune mesure à effectuer.

Conclusion : ce manuel fait rencontrer la proportionnalité du périmètre au diamètre d'abord sous la forme de la constance des accroissements puis sous la forme du coefficient de proportionnalité ; les élèves sont impliqués dans une activité effective de mesurage qui leur donne l'occasion de travailler la notion de périmètre dans le cas d'une courbe ; l'idécimalité de π est abordée.

On peut observer que l'énoncé de l'activité de découverte est très directif.

Le nouveau Math Elem CM2

La partie introductrice, intitulée *Découvrir*, montre avec des dessins assez réalistes comment mesurer le périmètre (avec un mètre de couturière ou une ficelle que l'on mesure) et le diamètre (avec deux équerres adossées à une barre rectiligne et une règle graduée) d'un objet cylindrique.

Puis, on donne un tableau fournissant la mesure du périmètre et du diamètre de hui objets dont la nature est précisée (lampe, assiette, tuyau...) ; il est alors demandé aux élèves de diviser le périmètre par le diamètre correspondant en utilisant une calculatrice. Le résultat doit être donné avec deux chiffres après la virgule. Ceci se termine par la question :

> Qu'observes-tu ? Calcule la moyenne de ces quotients.

Les quotients arrondis oscillent entre 3,12 et 3,16. Le recours à la moyenne (inspiré d'une pratique en Sciences expérimentales) n'est pas commenté.

Ceci est institutionnalisé sous la forme de deux formules avec rayon et diamètre. On précise que la longueur du cercle est proportionnel au rayon, que = 3,14159... et enfin que dans la plupart des calculs, il suffit de prendre 3,14 comme valeur approchée. Rien n'est dit sur le sens des points de suspension.

L'unité se termine par 4 exercices d'application. Dans l'un d'entre eux, l'élève doit mesurer lui-même le rayon.

Conclusion : ce manuel fait rencontrer la proportionnalité sous la forme opérateur scalaire (quotient constant) ; bien que les méthodes de mesurage du périmètre et du diamètre soient montrées, elles ne sont pas utilisées par les élèves, le manuel donnant les mesures sur lesquelles l'élève doit constater la proportionnalité en effectuant des divisions. La spécificité de π n'est l'objet d'aucun commentaire.

Objectif Calcul CM2

La formule du périmètre d'un cercle apparaît dans une unité intitulée « Décimaux, fractions et mesures de longueurs (2) ». L'exercice n°10 aborde ce thème en donnant d'emblée la formule $P = \pi D$ attribuée aux hommes de l'Antiquité. Le nombre π est l'objet des considérations suivantes :

> Ce nombre mystérieux (π) n'est ni un entier ni un décimal, ni une fraction. Il a une infinité de chiffres après la virgule.
> $\pi = 3.1415926535897...$

Puis on donne aux élèves la consigne suivante accompagnée du dessin de 3 cercles a, b et c (centre pointé) :

> Les périmètres des cercles a, b et c mesurent environ : 44 mm, 66 mm, 157 mm.
>
> Mesure les diamètres de ces cercles puis, pour chacun d'eux, divise le périmètre par le diamètre. Quelles valeurs approchées trouves-tu pour π ?

L'objectif annoncé aux enseignants dans le livre du maître est la détermination de valeurs approchées de π.

Conclusion : Les élèves sont partiellement impliqués dans la détermination de mesures, ce qui est fréquent à ce niveau mais on notera qu'ils ne le sont pas pour les périmètres ce qui ne les met pas en situation de travailler sur la notion de périmètre dans le cas d'une surface de frontière non polygonale. La proportionnalité n'est qu'indirectement abordée lors de la première rencontre avec la formule, les élèves ayant à leur charge de convertir la formule multiplicative en une propriété relative au quotient. La nature idécimale de π est mentionnée.

Ces trois manuels présentent 3 stratégies de présentation de la formule du périmètre :
- Mesurage effectif par les élèves qui donne lieu à un travail sur la notion de périmètre d'une surface non polygonale et mise en évidence de la proportionnalité ;
- Mesurage seulement montré mais non pratiqué, les élèves étant seulement impliqués dans des calculs qui conduisent à la formulation de la proportionnalité.
- Pas de référence au mesurage effectif, la formule est donnée et le calcul des quotients (après mesurage des diamètres seulement) donne des valeurs approchées de π . La proportionnalité n'est constatée qu'a posteriori.

Les trois manuels retiennent la valeur 3,14 pour π, l'idécimalité est explicitée dans deux cas sur trois.

Le périmètre du cercle dans les manuels de Sixième

Nous avons analysé six manuels, les trois premiers sont les plus utilisés : *Cinq sur Cinq (Hachette), Triangle (Hatier), Nouveau Transmath (Nathan), Nouveau Décimale (Belin), Bordas, Magnard-édition 2000.*

Nous relevons les points suivants :
- Quatre manuels proposent un travail sur l'idée de périmètre d'un cercle (ficelle) ;trois (Magnard, Triangle, Nouveau Décimale) impliquent les élèves dans des manipulations effectives, dans le dernier (Bordas), il s'agit d'une simple évocation.
- Deux des trois manuels les plus utilisés (Triangle, Nouveau Transmath) considèrent la formule comme déjà connue et ne proposent donc aucune activité relative à la mise en évidence de la proportionnalité. Les autres reviennent sur ce point : avec mesurage par les élèves dans les manuels Magnard, Bordas et Nouveau Décimale, le Cinq sur Cinq fournissant les mesures sur lesquelles il s'agit de mener le calcul des quotients.
- Tous les manuels donnent la valeur approchée 3,14 pour π ; Bordas, Nouveau Décimale et Magnard proposent d'autres valeurs approchées. Enfin 3 manuels (Triangle, Nouveau Décimale, Magnard) font mention de l'idécimalité.

Nous retiendrons deux exemples extrêmes d'activités introductrices. Elles montrent la diversité des situations considérées comme des Activités dans les manuels de collège.
Cinq sur Cinq 6^{e} Ch.11 Périmètres et aires.

Ce chapitre commence par 2 pages intitulées *De quoi s'agit-il ?* divisées en deux rubriques : *Comment différencier le périmètre et l'aire ? Comment effectuer des changements d'unité de mesure ?* et *Comment calculer le périmètre et l'aire de figures simples ? Comment calculer la longueur d'un cercle ?*. Dans cette seconde rubrique, la première partie est consacrée aux rectangle, carré et triangle rectangle, la seconde au cercle. Celle-ci (1/3 page) est intitulée *Avec pi !* :

> A l'aide d'un logiciel de construction géométrique, on a tracé le cercle ci-contre [cercle avec un diamètre, les extrémités du diamètre et le centre sont pointés en rouge, figurent

en surimpression du diamètre 3,35 cm et à côté du cercle 10,53 cm] On a ensuite affiché la mesure de son diamètre et de sa longueur (on dit aussi périmètre).

En faisant varier le diamètre, on a obtenu les résultats des deux premières lignes du tableau suivant :

Diamètre d (en cm)	3,35	4,77	5,44	1,71	0,99
Longueur L du cercle (en cm)	10,53	14,99	17,09	5,38	3,11
Quotient L : d	...	...	...	...	...

1. Recopier le tableau puis le compléter en utilisant une calculatrice (ou un tableur).

2. Recopier et compléter :

La ... d'un cercle est proportionnelle à son ... . Le coefficient de proportionnalité est un ... très proche de 3,14. (p. 163)

Les valeurs tronquées trouvées pour les quotients sont les suivantes :
3,1432 3,1425 3,1415 3,1461 3,1414

Les élèves n'ont donc ici aucune implication dans la détermination de mesures. Cette activité invoque en fait une situation de mesure dont ils ne peuvent pas connaître les instruments. D'ailleurs, le manuel ne propose aucune activité qui travaillerait sur le concept de périmètre. Aucune réflexion n'est proposée sur l'approximation donnée des mesures (pourquoi des décimaux à deux chiffres, s'agit-il de mesures exactes ?).

Les valeurs trouvées pour les quotients sont effectivement proches de 3,14. la stratégie adoptée permet au professeur d'éviter la confrontation à l'irrégularité des valeurs trouvées en cas de mesurage effectif par les élèves. Quoiqu'il en soit, ces quotients ne sont pas égaux entre eux, comment passe-t-on de cette observation à la phrase de conclusion ? Le manuel n'en dit rien.

La deuxième question ne laisse aucune responsabilité à l'élève quant au repérage de la proportionnalité. Les mots qu'il doit ajouter pour compléter la phrase ne sont pas au cœur de l'enjeu de ce qu'on ne peut vraiment pas appeler une activité : les élèves n'y sont que des exécutants, ils effectuent des calculs entre des nombres qu'ils n'ont pas eu l'occasion de mesurer et ils complètent des trous dans une phrase.

Magnard Ch. 4 : Aire et périmètre · Activité 8 (deux tiers de page) : *A la recherche de π (3,1415...)* p.69

Prends plusieurs boites cylindriques de différents diamètres.

Pour chaque boîte, mesure le diamètre une dizaine de fois et prends la moyenne d des 10 mesures.

Entoure chaque boîte d'un fil, en faisant 10 tours. Mesure la longueur totale du fil et divise par 10 pour avoir une mesure p du périmètre de la boîte.

Rassemble les valeurs obtenues dans un tableau

Boîte	N°1	N°2	N°3	N°4	
Diamètre d					
Périmètre p					
Calcul p :d					

Les élèves sont donc amenés à effectuer eux-mêmes des mesures. Une certaine prise en compte de la difficulté liée au processus de mesurage est présente dans l'énoncé. Elle fait écho aux démarches effectives des sciences expérimentales. Mais aucun commentaire ne cherche à justifier les mesures demandées, rien non plus sur les variations incontournables des valeurs trouvées pour les quotients.

Signalons pour terminer cette étude qu'un rapide examen des manuels correspondant aux nouveaux programmes, en vigueur depuis Septembre 2005, semble montrer une sensible évolution des activités proposées, impliquant dans plus de cas les élèves dans des mesurages.

Conclusion.

L'attitude des manuels est variable, ce qui peut s'expliquer par le fait que la formule du périmètre figurait au programme de l'école élémentaire pendant l'essentiel de la période d'utilisation des manuels en question. Ainsi 2 sur 6 ne reviennent pas sur la notion de périmètre et 3 sur 6 seulement amènent les élèves à se confronter matériellement au problème de sa détermination. Les proportions sont exactement identiques pour ce qui concerne la question de la proportionnalité périmètre/diamètre. En fait, deux manuels seulement qui ne figurent pas parmi les plus utilisés impliquent matériellement les élèves dans une activité mettant en jeu les deux aspects.

Pour ce qui est du nombre π , on ne s'attarde pas sur lui ; la moitié des manuels mentionnent sans développement son idécimalité, tous donnent la valeur approchée 3,14 et 5 sur 6 d'autres valeurs.

L'aire du disque dans les manuels de cinquième

Les six manuels examinés sont les suivants : *Nouveau Décimale (Belin), Bordas, Cinq sur Cinq (Hachette), Triangle (Hatier), Magnard, Nouveau Transmath (Nathan), - édition 2001.*

Nouveau Décimale

Ce manuel propose 4 Activités (4 pages) consacrées successivement à l'aire du parallélogramme, du triangle, du disque puis à des méthodes de calcul. Le manuel ne revient pas sur la détermination de l'aire par pavage.

Sur une page complète, l'activité consacrée au disque fait dans un premier temps établir la formule donnant l'aire d'un polygone régulier à n sommets en fonction du côté a et de la distance h du centre aux côtés. On s'intéresse ensuite au disque. Le manuel présente le dessin d'un cercle (en rouge) et de deux dodécagones, respectivement inscrit (en vert) et circonscrit (en bleu) au cercle. Les valeurs du rayon r du cercle et de la distance h du centre du cercle aux côtés du polygone inscrit figurent sur ce dessin ; un codage de perpendicularité fait apparaître que le rayon r est aussi la distance du centre aux côtés du polygone circonscrit.

Les questions se présentent ainsi :

> a. A 0,1 cm près, le périmètre p1 du polygone bleu est égal à 19,3 cm, le périmètre p2 du polygone vert est égal à 18,6 cm. Calcule les aires A1 et A2 de ces polygones à 1 cm^2 près.
>
> b. A l'aide des résultats du a., encadre l'aire A du disque rouge de rayon 3cm.
>
> c. L'aire d'un disque de rayon r est donnée par la formule $A = \pi.r^2$. Calcule A si $r = 3cm$. Compare avec le résultat du b.

Cette activité rappelle le travail sur les polygones présenté au Chili. Mais il faut remarquer que d'une part l'élève n'intervient pas dans la réalisation du dessin ni dans la détermination des mesures et que d'autre part, la référence au polygone n'est pas généralisée pour justifier la formule de l'aire du disque. Le lien entre cercle et polygones ne donne lieu à aucune institutionnalisation.

La partie suivante, intitulée « L'essentiel » contient un formulaire qui reprend la formule de l'aire du disque et remarque que le nombre π permet aussi de calculer la longueur d'un cercle, la formule étant rappelée.

Bordas

L'aire du disque est l'objet d'une activité (1 page). Trois surfaces colorées délimitées par des cercles sont données sur papier quadrillé. Pour chaque cercle, un carré circonscrit est dessiné en pointillé.

La première question demande de prévoir un ordre de grandeur de l'aire (exprimée en carreaux) en utilisant le quadrillage et les carrés tracés en pointillés. Les commentaires destinés aux professeurs font référence à un encadrement dont on peut remarquer qu'il n'est pas demandé dans l'énoncé et affirment que cette approche permet de donner du sens à une formule souvent trop abstraite pour les élèves. Mais aucun prolongement ne cherche à obtenir des approximations moins grossières.

La deuxième question donne la formule en rappelant que π est un nombre dont 3,14 est une valeur approchée et fait appliquer la formule pour les 3 disques initiaux. La dernière question fait comparer les résultats obtenus en utilisant la touche π de la calculatrice à ceux qu'on obtient avec 3,14.

Le cours énonce les formules de l'aire du disque, de l'aire latérale et du volume d'un cylindre.

Cinq sur Cinq

La rubrique « De quoi s'agit-il ? » présente sur deux pages quatre activités, les deux dernières consacrées au disque. Notons qu'aucun travail ne reprend l'idée de détermination exacte ou approchée d'une aire par pavage.

L'activité 3, intitulée « En connaître un rayon ! » commence par deux citations :

> Si la circonférence est fière d'être égale à deux pierres,
>
> Le cercle est tout heureux d'être égal à Pierre II (Oulipo)
>
> L'aire d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et l'autre côté de l'angle droit à la circonférence du cercle. (Archimède)

Les questions posées aux élèves sont les suivantes :

> 1. Rappeler la formule du périmètre d'un cercle en fonction de son rayon R. Au fait ! La solution est donnée par la première strophe du poème d'Oulipo.
>
> 2. a) En utilisant la proposition d'Archimède, exprimer l'aire d'un disque en fonction de son rayon R.
>
> b) Contrôler le résultat obtenu grâce à la seconde strophe du poème d'Oulipo.

Quelles sont les raisons qui ont poussé les auteurs à un tel énoncé ? Nous ne nous attarderons pas sur ce sujet. Nous retiendrons seulement que rien n'est entrepris pour légitimer les formules avancées.

La dernière activité est consacrée à la proportionnalité de l'aire d'un secteur angulaire et de la mesure de l'angle.

La rubrique « Retenir notions et méthodes » rappelle la formule du périmètre d'un disque et donne celle de l'aire en rappelant que $\pi \approx 3,14$. On attire l'attention sur le fait que $r^2 \neq 2r$.

Puis on passe aux applications (calcul de l'aire d'une figure complexe, calcul de l'aire d'un secteur angulaire).

Triangle

La page de présentation de ce chapitre fait référence en quelques lignes à une méthode attribuée aux Egyptiens : il s'agit d'approcher l'aire du disque par celle d'un octogone. Les Egyptiens se trompaient-ils beaucoup dans ce calcul ? Telle est la question qui clôt cette présentation dont la thématique ne sera pas reprise.

Le chapitre propose neuf activités, aucune activité ne vise à introduire la formule de l'aire du disque dont la formule est directement donnée puis appliquée ; à cette occasion, la valeur approchée 3,14 est rappelée. Une activité s'attarde sur les différentes interprétations erronées de la formule (confusion avec la formule du périmètre, confusion rayon/diamètre, confusion double/carré). Ce chapitre ne revient pas sur l'idée de détermination de l'aire par pavage.

La rubrique « Connaissances » donnent les formules d'aires figurant au programme et en remarque rappelle que la calculatrice donne directement une valeur approchée de π . Les méthodes concernent la détermination de l'aire par application d'une figure ou par décomposition en figures simples.

Magnard

Ce manuel propose 7 activités sur les aires. L'activité 4 (1 page, p.105) est consacrée à l'aire du disque. Elle comprend trois approches différentes :

1)Aire et quadrillage.

> Sur du papier quadrillé 5×5, trace un cercle de rayon 5 cm. Évalue le nombre de carrés nécessaires pour couvrir à peu près l'intérieur du disque. Évalue le nombre minimum de carrés nécessaires pour recouvrir le disque. Déduis-en un encadrement de l'aire du disque en cm^2

2) A la manière des Anciens.

Le processus proposé est analogue à celui qui est abordé au Chili (secteurs angulaires identiques disposés tête-bêche). Après avoir montré la manipulation sur des quarts de disques, on demande :

> Fais le même travail avec un disque partagé en 10 secteurs identiques. Imagine la figure obtenue si l'on découpe le disque en 100 secteurs angulaires identiques et dessine son contour. Que peux-tu dire de sa longueur ? De sa largeur ? De son aire ?
>
> Écris une formule donnant l'aire d'un disque.

3) Des calculs

Il s'agit d'appliquer la formule en donnant d'abord une valeur exacte puis une valeur approchée en prenant 3,14 pour π

La rubrique « L'essentiel » donne une définition du disque puis dans un formulaire, la formule de l'aire du disque, accompagnée de deux valeurs arrondis de π .

Nouveau Transmath

Ce manuel propose six activités d'introduction (3 pages) ; deux sont consacrées à l'aire, d'un triangle puis du disque (1/2 page). Celle-ci commence par une Info :

> Le géomètre grec Archimède (-284,-212) a été le premier à expliquer comment calculer l'aire d'un disque en le découpant régulièrement en beaucoup de triangles.

Suivent deux questions.

La première est illustrée par deux dessins représentant respectivement un hexagone et un dodécagone inscrits dans un cercle. On demande aux élèves de dire quel polygone a l'aire la plus proche de celle du disque puis de dire ce qui se passe si on trace un nombre encore plus grand de triangles.

La seconde question donne la formule de l'aire du disque sous deux formes – $\dfrac{R \times 2\pi R}{2}$ et $\pi \times R \times R$ – il est alors demandé aux élèves d'imaginer une explication en observant un dessin qui reprend un dodécagone inscrit en introduisant une représentation de la hauteur h de l'un des 12 triangles, un codage du rayon et de la base d'un triangle par R et b respectivement.

L'objectif annoncé pour le professeur est de *donner une image mentale qui permet de comprendre la formule de l'aire d'un disque.*

Le cours reprend la formule en insistant sur la lecture et le sens de R^2. Un exemple d'illustration fait la distinction entre la valeur exacte (25 π cm^2), la valeur donnée à la calculatrice et l'arrondi. Rien n'est dit sur le nombre π.

Conclusion.

Sur six manuels, deux (Magnard, Nouveau Transmath) font véritablement un effort pour justifier la formule. Deux (Bordas, Magnard) lient aire du disque et quadrillage mais pour Bordas, l'encadrement obtenu est très grossier. Un troisième manuel obtient un encadrement grâce à deux dodécagones inscrit et circonscrit mais, contrairement à ce que propose le Nouveau Transmath, le travail effectué sur le périmètre d'un polygone régulier ne sert pas de point d'appui pour justifier la formule.

Les deux derniers manuels donnent la formule sans aucune activité préparatoire.

Le nombre π n'est l'objet d'aucune réflexion particulière.

Nous terminerons ces analyses par la remarque suivante : les manuels de collège ne donnent aucune indication de gestion ; il n'est jamais envisagé que certaines activités puissent être traitées en groupe ou par paires.

4.2.3 Synthèse

Le programme français introduit les formules de périmètre et d'aire du disque séparément (CM2 pour le périmètre dans les programmes en vigueur jusqu'en 2003-2004, 6e aujourd'hui, 5e pour l'aire), à un moment où la réflexion sur l'idécimalité et l'irrationnalité n'est pas en vue. Le programme chilien aborde la même année (8B, ce qui correspond à la 4^e) dans une même unité ces différentes notions, idécimalité comprise.

Les Dacc chiliens proposent un ensemble riche d'activités qui mettent les élèves en situation de construire un sens aux notions de périmètre et d'aire du disque puis aux formules ainsi qu'à l'idécimalité de . Un premier travail repose sur l'invention et la réalisation de procédés de mesures effectives du périmètre comme de l'aire. En prolongement de cette approche matérielle, la formule du périmètre est justifiée par une vérification expérimentale de la proportionnalité Périmètre/Diamètre. Pour celle de l'aire, deux justifications plus intellectuelles puisque reposant sur un passage à l'infini, sont proposées.

Certaines réflexions, toutefois très confuses, laissent à penser qu'une certaine différenciation entre cercle idéal et objet matériel est envisagée en liaison avec l'idécimalité de π.

La description des modalités de mise en œuvre des activités fait régulièrement mention de consigne visant à impliquer les élèves, notamment dans des travaux collectifs ; il est clair qu'on ne peut savoir à ce niveau de l'étude si ces conseils pédagogiques sont suivis dans les classes.

Les manuels agréés analysés reprennent à leur compte l'essentiel des suggestions ministérielles à l'exception de la réflexion sur l'idécimalité du nombre π ; le changement possible de paradigme n'est donc pas du tout envisagé. Il apparaît toutefois que d'autres manuels peuvent faire des choix radicalement différents de ceux du Ministère.

Les textes officiels français ne définissent aucun projet détaillé. L'analyse des manuels montre une grande diversité. Nous nous autoriserons à résumer les résultats de l'étude de la façon suivante :

– un tiers des manuels (ce ne sont pas au collège les plus utilisés) adoptent une démarche comparable à la démarche chilienne, c'est-à-dire s'efforcent de donner du sens aux

notions et aux formules en impliquant les élèves dans des activités réelles, n'excluant pas la réalisation de mesures ;
- un tiers des manuels se contentent de donner les formules puis de les faire appliquer ;
- le dernier tiers propose certaines activités d'approche mais le mesurage en est exclu.

Dans ce dernier tiers, on trouve plutôt des activités relativement guidées dans lesquelles les élèves surtout un rôle d'exécutants mais on ne peut affirmer que les activités plus riches rencontrées dans d'autres manuels ne dérivent pas vers le même genre de gestion réductrice, dans la mesure où, contrairement aux Dacc chiliennes, les manuels de collège français (y compris dans leur version destinée aux professeurs) ne donnent pas d'indication sur la mise en œuvre.

Rien, dans les manuels, ne vient interroger la nature des objets mesurés. Aucune des deux formules n'est établie selon des critères internes au paradigme géométrique de GII, pourtant en vigueur au moins en Cinquième. On ne trouve cependant aucun avertissement particulier sur la validation de ces résultats.

4.3 La problématique des figures de même forme et de la semejanza de figuras

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude d'un thème mathématique apparemment commun à la scolarité des deux pays et dont l'apprentissage s'étend sur plusieurs années. Il n'est pas facile de désigner ce thème sans risquer de donner la prééminence à la conception d'un des deux pays. Au Chili, le terme de similitude (semejanza) est d'un usage courant dans les programmes, les programmes français n'utilisent pas ce mot qui est exclusivement réservé aux transformations du plan. Ainsi les figures sont dites de même forme ou, très souvent dans les manuels, semblables reprenant ainsi l'usage très courant de ce terme dans les anciens programmes de géométrie.

Sur le cas de la similitude des figures, nous revenons comme dans les deux thèmes précédents sur la question de la nature de la géométrie mise en œuvre. Il s'agit d'identifier le paradigme dominant, ou le jeu des paradigmes, éventuellement assumé ou lisible dans les intentions décrites par les auteurs des programmes et des manuels.

L'étude du paradigme géométrique enseigné passe aussi par la mise en évidence des espaces de travail géométrique développés dans chacun des pays. Nous interrogerons ici notamment les objets proposés à l'étude du point de vue de leur statut mais aussi de leur fonction, notamment sur le rôle d'outil social ou interne aux mathématiques qu'ils peuvent jouer.

4.3.1 Approche chilienne

4.3.1.1 Dans les Programmes et Documents d'accompagnement (Dacc)

Au Chili, la première rencontre avec le thème étudié apparaît en 6B à travers l'agrandissement/réduction de figures planes :

Sexto Año Básico

> Perímetro y área : Ampliación y reducción de cuadrados y rectángulos en papel cuadrilado, expresando como razones las variaciones de los lados, el perímetro y el area.

Les Dacc proposent une activité explorant les conséquences sur l'aire et le périmètre d'un agrandissement des dimensions d'un carré puis d'un rectangle (multiplication par 2, 3, 4, 5). On demande aux élèves de formuler des règles à partir des cas étudiés puis de les confronter au cas d'une multiplication par 6 (la validation du résultat obtenu par application de la règle s'obtient par réalisation d'un dessin sur papier quadrillé ou par un calcul utilisant les formules connues sur l'aire et le périmètre). On ne sait pas sous quelle forme sont institutionnalisées les règles formulées qui n'auront été confrontées qu'à des cas particuliers.

Une deuxième activité porte sur la réalisation d'objets :

> "Planifican la construcción de objetos determinando sus medidas reales y elaborando planos esquemáticos a escala de sus piezas.
> Ejemplo: construyen los planos para una conejera o casa para el perro."

On peut remarquer que la tâche se termine par un calcul du coût de la réalisation et que les commentaires envisagent la possibilité d'une construction effective :

> "Si se construyen efectivamente alguno de los objetos propuestos, deberán enfrentar el desafío de dibujar rectas paralelelas, perpendiculares, ángulos rectos, en pliegos grandes de papel, por ejemplo. Esto plantea desafíos adicionales mayores que dibujar en hojas de cuaderno, por ejemplo." p. 110

On se situe ainsi dans une problématique réaliste dans le cadre du cours de mathématiques. Signalons enfin que les propositions pour l'évaluation incluent une tâche analogue.

La proportionnalité est abordée en 7B ; à ce niveau, le programme de l'unité consacrée à ce thème ne fait pas mention de questions géométriques. Parmi les activités proposées par les Dacc, le point de vue de l'agrandissement est absent. On rencontre seulement une recherche sur la place de la proportionnalité dans les arts avec un travail sur le nombre d'or.

Le thème de la proportionnalité est repris en 8B et cette fois, un point de vue géométrique est développé :

Octavo Año Básico

> Proporcionalidad : Resolución de problemas geométricos de proporcionalidad (producir figuras semejantes). Realización e interpretación de planos de tipo esquemáticos a escala.

L'Activité 4 des Dacc est consacrée à la construction de figures géométriques semblables par application de critères de proportionnalité. Deux thèmes sont abordés :

1 Etant connues les dimensions d'un écran de télévision, quelles doivent être les dimensions d'un écran dont la longueur de la diagonale est double pour que l'image ne soit pas déformée ?

2 Un travail sur des rectangles emboîtés (il s'agit d'une photographie et de son cadre), dans quels cas les diagonales se superposent-elles ?

Il apparaît dans les commentaires que des figures sont dites semblables si leurs dimensions sont proportionnelles. Dans les deux cas, la similitude des rectangles est mise en relation avec la superposition des diagonales, particulièrement lorsque l'on fait coïncider un sommet et les deux côtés correspondants, ce qui fait apparaître une configuration d'homothétie. Il semble que ce travail débouche sur une méthode géométrique pour tester si deux rectangles sont semblables. Ces propriétés sont-elles institutionnalisées ? Rien n'est dit sur le sujet. Quoiqu'il en soit aucune validation générique n'est évoquée.

L'Activité 5 porte sur la représentation à l'échelle. Les élèves doivent savoir :

> Ampliar o reducir según una razón dada. Caracterizar la razón como una escala. Determinar la escala adecuada para ampliar o reducir dibujos en determinadas situaciones. Determinar la escala en que se ha ampliado o reducido un determino dibujo. p. 71

Le premier travail proposé est la réalisation et l'utilisation effective d'un pantographe avec le commentaire suivant :

> "El pantógrafo se puede construir con cartón rigid. Es en el proceso de construcción en que se observan las relaciones entre las medidas. Por esta razón, la actividad requiere que los alumnos y alumnas lo construyan y no es conveniente que lo compren y sólo lo usen para dibujar"

Un second travail est centré sur la notion d'échelle : analyse de cartes et plans disponibles (il s'agit de repérer l'échelle, de déterminer quels sont les éléments reliés par l'échelle) ; réalisation d'une représentation à l'échelle à partir d'un objet réel :

> "[...]. Explican los criterios utilizados para elegir una escala.
>
> Realizan el dibujo correspondiente.
>
> Registran el proceso de dibujo y explican, por ejemplo, cómo resolvieron el dibujo de los ángulos, en caso de haberlos, o el trazado de rectas paralelas.
>
> Justifican adecuadamente por qué pueden asegurar que su dibujo representa adecuadamente el objeto elegido y que, efectivamente, se mantienen las proporciones." p. 74

Nous notons le souci de mettre en relation la proportionnalité des dimensions et la forme géométrique, notamment à travers la conservation des angles. On peut cependant se demander quelle justification est attendue des élèves dans la dernière question de l'activité ci-dessus, les connaissances nécessaires n'étant pas encore disponibles (les cas de similitude sont enseignés en 2M).

Nous retiendrons que, si les activités proposées comprennent quelques calculs, elles intègrent aussi au moins à part égale, sinon plus, un travail géométrique que l'on peut considérer comme un processus d'acculturation à la notion de figures semblables.

Pour ce qui concerne le paradigme géométrique, l'espace de travail des élèves est clairement composé d'objets matériels. Si des justifications sont attendues, elles semblent, du côté des élèves, internes à la Géométrie I. La formulation des instructions ne permet pas de savoir si des résultats sont institutionnalisés ; on ne sait pas non plus si le professeur fait la différence entre conjecture et résultat général validé comme cela est demandé en 7B ou s'il reprend à son compte le type de validation expérimentale fourni par les élèves.

La première année de l'Enseñanza Media est en géométrie centrée sur les transformations isométriques et la congruence des figures. On n'y revient donc pas sur l'agrandissement-réduction qui est au contraire un objet central en deuxième année.

Segundo Año Medio

L'unité 2 du programme de géométrie est intitulée « Semejanza de figuras planas ». Les contenus visés sont les suivants (p. 36) :

Contenidos	**Aprendizajes esperados**
a. Semejanza de figuras planas. Criterios de semejanza. Dibujo a escala en diversos contextos. b. Teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada. c. Distinción entre hipótesis y tesis.Organización lógica de los argumentos. d. Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales. Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones. e. Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos,cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales. Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos. Presencia de la geometría en expresiones artísticas ; por ejemplo, la razón áurea.	Los alumnos y alumnas : 1. Conocen los criterios de semejanza de triángulos y los aplican en el análisis de diferentes polígonos y en la resolución de problemas. 2. Reconocen y describen las invariantes que se establecen al ampliar oreducir figuras. 3. Conocen el Teorema de Thales sobre proporcionalidad de trazos y loaplican en la resolución de problemas. 4. Conjeturan y demuestran propiedades geométricas asociadas a laproporcionalidad de trazos y a la semejanza de figuras planas,distinguiendo entre hipótesis y tesis. 5. Conocen acerca de la mutua influencia entre la geometría y algunasexpresiones artísticas. 6. Estiman distancias y longitudes aplicando semejanza de triángulos.

On voit donc rassembler dans cette unité un réseau de connaissances liées à la notion d'agrandissement/réduction.

L'Activité 1 (p. 39) proposent plusieurs exemples relevant de pratiques sociales concernant l'agrandissement/réduction (travail sur les cartes géographiques allant jusqu'aux projections de Mercator et Peters, sur des plans de machines, sur des maquettes de bâtiments, sur l'emploi d'un plan pour implanter des meubles, sur les échelles de photographie). L'intention affichée est que :

> "Los alumnos y alumnas se familiarecen con el fenómeno de la ampliación y la reducción de figuras y cuerpos ; que visualisen que se mantiene la forma y que el cambio en las medidas de longitud se rige por una escala..."

Cette familiarisation, qui se situe tout à fait dans le prolongement du travail proposé en 8B, se poursuit dans l'Activité 2 (p. 40) par des tracés de dessins semblables[5] (réalisation et utilisation d'un pantographe, agrandissement d'un puzzle, effets de l'homothétie) avec la perspective que les élèves :

> "Construyen figuras semejantes, comparan las medidas de los ángulos y de las longitudes de los lados ; construyen tablas y gráficos ; establecen las invariantes asociadas a la semejanza de figuras planas."

Si aucune définition n'est explicitée dans le texte, il semble que la notion de figures semblables sous-jacente soit l'identité de formes traduites par l'égalité des angles et la conservation des rapports de longueurs. Mais un peu plus loin, on trouve la phrase suivante qui donne une autre définition :

> Actividad 5 : Sistematizan los teoremas de semejanza par cualquier triángulo
>
> "Se puede definir la semejanza como la sucesión de una isometría y una homotecia o viceversa." p. 48

Les instructions aux professeurs pour le puzzle montrent bien que les auteurs ne considèrent pas encore comme acquis le fait que le modèle multiplicatif soit celui que les élèves mobilisent dans un agrandissement non décimal[6] :

> "En este ejemplo, algunos alumnos y alumnas suelen sumar 3 cm a cada medida, probablemente porque es la diferencia entre 8 y 5; si en la actividad se propusiera duplicar la medida: lo que mide 5 cm pasas a medir 10 cm, las alumnos y alumnas aplicarían el modelo multiplicativo; en ese caso el factor de multiplicación es 2.
>
> En este ejemplo, el factor multiplicativo es 8/5; que este factor no sea un número entero plantea dificuldad mayor que cuando el factor es entero; los alumnos y alumnas aplican, en este caso, erróneamente, el modelo aditivo." p. 41

Nous donnerons le texte de l'exemple C pour ce qu'il laisse entrevoir des indications de gestion données aux professeurs :

> "Se organiza al curso en grupos; cada grupo recorta 10 o más rectángulos considerando dos o tres razones diferentes entre sus lados; se pasan estos rectángulos a otro grupo para que los clasifique por semejanza.
>
> Indicaciones al docente: Analizar y discutir los procedimientos que presenten los estudiantes. Invitarlos a comparar las medidas de los lados y de las diagonales. Analizar la comparación por diferencia y por couciente. "p.41

Nous trouvons ici un exemple de gestion d'une activité par un travail de groupes qui est une constante dans les activités suggérées par les Dacc.

Il semble que les différents travaux proposés dans l'Activité 2 débouchent sur la formulation de résultats concernant notamment les figures semblables :

> "A partir de trabajos de este tipo [il s'agit ici du puzzle] se pueden inducir "teoremas" de semejanza de las figuras en relación con sus regularidades. " p.41

[5]Les textes font référence à des figures (figuras) mais conformément à notre cadre théorique, nous parlons de dessin lorsqu'il s'agit d'un tracé effectif, au crayon ou à l'ordinateur.

[6]La longueur 5 cm doit être agrandie à 8 cm. La raison est donc décimale (multiplication par 1,6). De plus les pièces qu'il faut agrandir ne s'imbriquent pas les unes dans les autres, elles servent par juxtaposition à « dessiner » un bonhomme. Seule une appréciation visuelle peut donc permettre à l'élève de contrôler sa production, contrairement à ce qui se passe dans un véritable puzzle - voir la situation bien connue de Brousseau.

Seule la présence des guillemets donne à penser que les théorèmes en question ne sont que des conjectures, mais rien n'est dit sur ce point. Or, les travaux proposés dans cette unité concernent la réalisation de dessins, objets de GI qui ne permettent en aucun cas de valider des théorèmes de GII.

Les Activités 3, 4 et 5 passent à un niveau différent : il s'agit d'utiliser le théorème de Thalès et les critères de similitude dans la résolution de problèmes.
Comment sont établis ces résultats ?

Le théorème de Thalès est abordé dans l'Activité 3 mais celle-ci ne propose aucun travail qui puisse être considéré comme une préparation à ce théorème, ce qui est peu conforme aux orientations didactiques constatées sur d'autres thèmes (voir études relatives au Théorème de Pythagore et aux formules de périmètre et d'aire du disque). Il est précisé (p.43) que les élèves doivent connaître et pouvoir comprendre une démonstration, la formulation laisse à penser que cette démonstration est donnée par le professeur.

En ce qui concerne les critères de similitude, nous avons déjà vu que leur découverte par les élèves était envisagée dans les travaux de l'Activité 2. La première situation proposée dans l'Activité 5 semble viser à la découverte et à la formulation des critères par les élèves eux-mêmes :

> Actividad 5, Ejemplo A (p.48)
>
> "Organizar un juego de comunicación, considerando un triángulo escaleno como el siguiente. " [dessin fourni]
>
> "¿Cuál es el minimo de información que una persona necesita conocer para construir otro triángulo semejante con el dibujo ? Establecen los teoremas de semejanza para cualquier triángulo..."

Les indications pour le professeur ne précisent pas si on attend que les élèves produisent une démonstration ou si le professeur doit en produire une.

Les textes sont muets sur l'ordre de présentation des résultats et sur la nature des démonstrations possibles, deux dimensions évidemment liées. Les auteurs semblent hésiter entre les deux stratégies envisageables. En effet dans la liste des contenus, le théorème de Thalès suit les critères de similitude. Ceux-ci seraient ainsi considérés comme des connaissances premières à partir desquelles on pourrait démontrer le théorème de Thalès. Notons que dans ce cas, il est difficile de proposer une démonstration pour les critères et on peut s'attendre à ce que le travail expérimental proposé aux élèves dans l'Activité 5 soit considéré comme une justification suffisante. Si, au contraire, le Théorème de Thalès dans le triangle est vu en premier, il peut être démontré avec les aires (démonstration d'Euclide) ; il permet ensuite d'établir le théorème de Thalès général et les critères de similitude à partir des critères de congruence. L'organisation des Activités laisse à penser, en contradiction avec celle de la liste des contenus, que cette seconde approche est envisagée.

Nous noterons ici une absence d'explicitation sur un point délicat qui peut constituer un problème pour les professeurs.

Analyse des activités d'application

Dans l'Activité 3, parmi les six exercices d'application du théorème de Thalès proposés, trois sont classiques (division d'un segment dans un rapport donné, calcul d'une longueur manquante), un autre suppose d'utiliser le théorème de Pythagore. Les deux autres sont beaucoup plus ouverts, ils sont représentatifs du type de tâches suggérées au titre d'application des théorèmes enseignés, dans la plupart des unités :

> "Se quiere fijar un cuadro de 80cm por 60cm sobre un rectángulo de papel. La persona dueña quiere que se mantega la razón entre las medidas de los lados de la tela. Además,

> agrega que le gustaría que este marco de color no tuviera a más de 5 cm de ancho. ¿Qué soluciones se pueden proponer para las medidas de este marco ? "p. 44

Ce problème n'est accompagné d'aucune modélisation. Les instructions envisagent une gestion ouverte de l'étude de la question. Le dernier problème est le suivant :

> "En un dibujo como el siguiente en que $AB//CD//FG$, anotar medidas posibles de los trazos que se generan. ¿A cuáles y a cuántos trazos, como minimo, es posible asignarles medidas arbitrariamente para que la figura quede determinada ? "

Le texte est accompagné d'une configuration de deux droites sécantes en E, coupées par trois droites parallèles ; on obtient ainsi trois triangles dont deux seulement ont leurs sommets du même côté de E.

L'Activité 4 porte intégralement sur des procédés de détermination de grandeurs inaccessibles (pp.45-47). Ces procédés sont décrits en termes très pragmatiques mais sans donner aucun résultat numérique. Au contraire, l'énoncé commun aux six tâches envisagées précise :

> " Realizar algunas de estas estimaciones aprovechando alguna salida a terreno que el curso realice u organizando una actividad específica fuera de la sal de clases o del establecimiento educacional. " p. 45

Le conseil suivant est donné au professeur :

> "Sea interesante que los alumnos y alumnas realicen algunas de estas mediciones estimativas ; que se organicen en grupos de trabajo par analizar los distintos casos y explicar las razones que justifican estas estimaciones. Es importante que los estudiantes diferencien una estimación de la exactitud, que utilicen las cifras significativas y el rodeondo en los cálculos y que, además, valoren las estimaciones de medidas y resultados." p. 47

Il s'agit ici vraiment d'une posture comparable à celle des physiciens, qui n'ignorent pas la mesure et cherchent à prendre en compte les erreurs dues aux instruments.

a) Avec un miroir

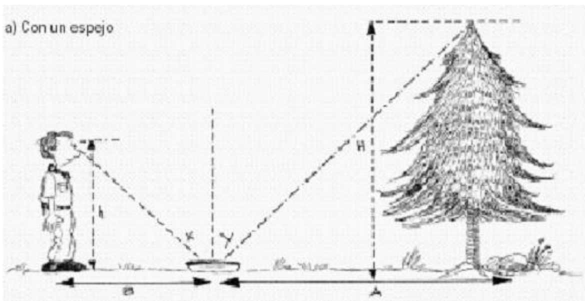


FIG. 4.3 – La méthode du miroir

b) La méthode du bûcheron

Fig. 4.4 – La méthode du bûcheron

Les méthodes possibles sont communiquées par un texte accompagné de dessins superposant dans tous les cas sauf un une représentation réaliste et une schématisation. Dans 4 cas, le schéma est codé : les points et certaines des grandeurs sont nommés. La modélisation n'est donc pas à la charge de l'élève sauf dans le dernier exemple (p. 47).

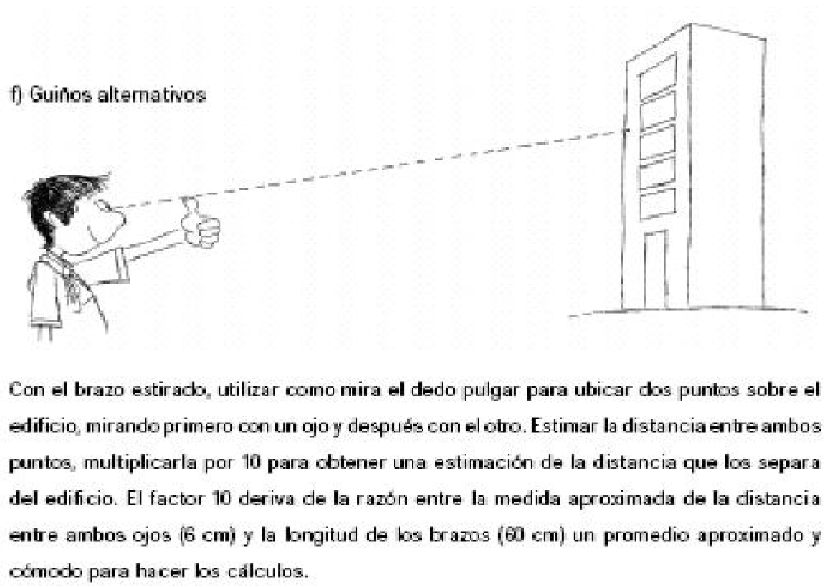


Fig. 4.5 – Hauteur d'un immeuble

L'Activité 5, après avoir proposé une situation visant à la découverte des critères de similitude (cf ci-dessus), les utilise dans deux exercices sans indication. Les triangles semblables pertinents ne sont pas indiqués. Dans le deuxième exercice, entièrement littéral, il faut utiliser plusieurs paires de triangles semblables. On retrouve la tendance signalée ci-dessus à proposer des exercices d'application d'un niveau de difficulté assez élevé.

L'Activité 6 concerne l'effet du rapport de similitude sur les aires. On demande dans l'un des deux exemples de doubler l'aire d'un carré.

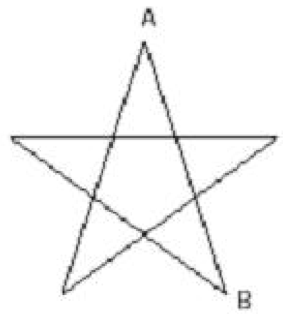
L'Activité 7 est centrée sur le nombre d'or. Elle commence par un travail exploratoire sur une suite de Fibonacci et se complète par des recherches sur la présence du nombre d'or dans la nature et dans les arts (activité qui pourrait se dérouler en collaboration avec le professeur d'arts), sur l'école Pythagoricienne et sa présence au Moyen-Age, sur les relations entre la proportionnalité et les canons de la beauté (chez les Grecs, à la Renaissance, aujourd'hui), sur Leonard de Vinci et la proportionnalité des mesures du corps.

L'évaluation : entre construction pratique et démonstration

Les documents se terminent par des conseils sur l'évaluation de l'unité en insistant plus particulièrement sur trois points : celui de la construction des figures semblables, puis celui de l'utilisation du théorème de Thalès et enfin celui de l'élaboration de démonstration grâce à l'usage des propriétés liées à la semejanza. De manière ambiguë, ces activités d'évaluation se proposent ainsi d'aller au-delà de la simple évaluation de l'unité. « Construyen figuras semejantes y establecen las invariantes asociadas a la semejanza de figuras planas. »

Ejemplo

Se necesita hacer una bandera. Se dispone de una estrella como la del dibujo en la que AB mide 6,8 cm.



Esta estrella es muy pequeña para el cuadrado blanco de la bandera que mide 25 cm por lado. Es necesario agrandarla para disponer de una en que la distancia AB sea igual a 17 cm. ¿Cómo se puede agrandar este modelo? Explique el procedimiento y las razones que lo sustentan.

Fig. 4.6 – Agrandir une étoile

Des commentaires précisent les points à observer pour l'enseignant. Il est fait référence aux procédés de construction et à leur maîtrise ainsi qu'aux critères utilisés pour expliquer cette construction :

> Interesa observar:
>
> i) qué procedimientos utilizan para agrandar el modelo: pantógrafo al que ajustan las medidas, homotecia de razón 2,5, ensayo y error, u otro;
>
> ii) Si las explicaciones son claras y hacen referencia a que la forma es la misma, pero más grande; o bien, si lo explican haciendo referencia a las medidas de los ángulos y de los lados.

Les deux points suivants sont davantage axés sur la justification théorique des résultats et sont décrits de la manière suivante :

> Resuelven problemas y elaboran demostraciones utilizando el Teorema de Thales o los teoremas de semejanza.

puis

> Aplican los teoremas de semejanza en la elaboración de demostraciones y en la resolución de problemas.

Ainsi trouve-t-on cet exemple qui propose en évaluation la découverte de la configuration appelée en France configuration de Varignon. Une discrète allusion à un usage possible des logiciels de géométrie est esquissée.

> Ejemplo C
>
> Dibujar un cuadrilátero cualquiera, determinar los puntos medios, unirlos y demostrar que la figura que se forma es un paralelogramo. Sugerencia : unir los vértices opuestos del cuadrilátero.
>
> (Este problema puede proponerse para que se utilice un programa computacional de geometría).

Les indications fournies à l'enseignant par le texte d'accompagnement mettent en évidence cette idée de préparation à la démonstration en pointant la différence entre les conclusions tirées du dessin sans justification et celles qui s'appuient sur les propriétés et une distinction entre données et but à démontrer

> "Observar si el dibujo los impulsa a plantear conclusiones no razonadas.
>
> Observar si relacionan la figura con la semejanza de triángulos o con el Teorema de Thales ; si distinguen entre los datos y lo que quieren demostrar"

Le thème des figures de même forme développé sous différentes formes en 2M n'est que peu repris pendant les deux dernières années :

Tercer Año Medio

L'unité de géométrie est centrée sur la trigonométrie des triangles rectangles. Les critères de similitude y sont donc utilisés pour établir certains résultats qui feront passer au second plan la problématique des triangles semblables dans le cas de triangles rectangles.

L'enseignement optionnel n'apporte rien de nouveau sur le sujet.

Cuarto Año Medio

L'enseignement commun est en géométrie centré sur la géométrie vectorielle et n'aborde donc pas le thème étudié ici. Dans l'option, l'unité consacrée aux processus infinis propose une activité entièrement consacrée aux processus itératifs en géométrie ; les élèves y rencontrent les notions de fractales (une telle approche figure explicitement dans la liste des contenus exigés ; Mandelbrot est cité dans le texte présentant les Orientations didactiques) et d'autosimilitude à propos du triangle de Sierpinski. Une recherche sur la présence de l'autosimilitude dans la nature est proposée. P. 17

Conclusion

Le programme chilien contient en 6B une première approche de l'idée d'agrandissement-réduction, uniquement sur papier quadrillé, en liaison avec l'étude des effets sur le périmètre et l'aire. Un travail sur les figures semblables et les représentations à l'échelle est proposé en 8B dans le cadre de l'unité consacrée à la proportionnalité. Si les activités proposées comprennent quelques calculs, elles intègrent aussi au moins à part égale, sinon plus, un travail géométrique centré sur des objets réels ou des dessins que l'on peut considérer comme un processus d'acculturation à la notion de figures semblables, prenant appui sur une idée intuitive d'identité de formes et envisageant autant les aspects angulaires que la proportionnalité des mesures.

Le programme de 2M revient dans l'une des unités de géométrie sur les aspects déjà rencontrés, les intégrant dans un réseau assez complet qui intègre les représentations à l'échelle, les figures semblables et les critères de similitude, le théorème de Thalès, la division d'un segment dans un rapport donné, le nombre d'or dans le cadre d'une étude des rapports entre géométrie et monde des arts. Les activités proposées par les Dacc abordent également la notion d'homothétie et l'effet sur les aires du rapport de similitude. Plusieurs points de vue sont présentés sur la notion de figures semblables : identité des formes, traduite en égalité des angles et proportionnalité des mesures, effet de la composition d'une isométrie (étudié en 1M) et d'une homothétie sur une figure.

On trouve enfin dans l'enseignement optionnel de 4M un travail sur les fractales et l'autosimilitude.

En 2M qui est donc l'année décisive pour ce sujet, les activités suggérées par les Dacc poursuivent ou reprennent le travail accompli en 8B visant à familiariser les élèves avec la notion de figures semblables, en s'appuyant d'une part sur les pratiques sociales de lecture et réalisation de cartes, plans et maquettes, d'autre part sur des procédés d'agrandissement-réduction de dessins, notamment par homothétie et réalisation puis usage d'un pantographe. Plusieurs activités, dont certaines menées en groupes, sont orientées vers la découverte par les élèves des critères de similitude pour les triangles. Ces critères doivent être " établis " par les élèves mais le texte ne précise pas quel type de preuve est attendu. Toutefois, cette unité intègre un travail sur les notions d'hypothèse et de conclusion, on peut donc escompter qu'il s'agit de démontrer les critères, ce qui est possible grâce au théorème de Thalès et aux critères d'isométrie vus en 1M, à condition toutefois d'établir d'abord le théorème de Thalès. Or sur la question de la chronologie des résultats, les textes sont muets et les implicites que l'on peut y déchiffrer sont contradictoires.

Le théorème de Thalès n'est pas directement l'objet d'un travail préparatoire ; si le texte précise que les élèves doivent en connaître une démonstration, rien n'est dit de celle-ci (une démonstration avec les aires est possible).

Les résultats de cette unité sont utilisés dans de nombreuses situations d'application, de contexte strictement mathématique ou dans la détermination de distances. Parmi les premiers, on rencontre des énoncés peu guidés, ayant plusieurs fois un caractère exploratoire. Pour les seconds, plusieurs situations de la vie réelle sont décrites mais aucune mesure n'est donnée ; au contraire, on encourage les professeurs à confronter leurs élèves à des situations de mesurage effectives et à réfléchir aux questions liées aux erreurs de mesure.

Enfin, plusieurs thèmes de recherche documentaire sur les liens entre la géométrie, l'histoire et les arts sont fournis.

Concernant la question du paradigme géométrique dans lequel s'inscrit le travail proposé, il semble que cette unité soit conçue par les auteurs des programmes comme une unité permettant la transition de l'espace de travail des élèves vers un type de Géométrie II avec mise en place de quelques règles de démonstration. Le raisonnement sera fortement étayé par des dessins sur lesquels il faudra reconnaître les configurations qui déclenchent le raisonnement. Mais l'ensemble des résultats étudiés ou produits ne semble vraiment trouver sa justification que dans la possibilité qu'il offre de résoudre des problèmes de la vie de tous les jours, plus spécifiquement liés à la Géométrie I. Les théorèmes jouent le rôle d'outils pour une géométrie du monde réel, dispensant de recourir sans arrêt à des mesures effectives. C'est une forme avancée de Géométrie I qui s'articule sur la mise en place de la Géométrie II mais sans se stabiliser dans ce modèle.

4.3.1.2 Dans les manuels de 2 Medio

L'étude des manuels va nous permettre de voir comment et dans quelle mesure, la direction donnée par les programmes officiels est proposée aux enseignants pour être mise en œuvre dans les classes. Il sera notamment intéressant de voir la place et la gestion de l'apprentissage de la démonstration.

Dans cette partie, nous présentons une analyse détaillée de l'unité 2 : Semanjanza de figuras planas du manuel Arrayán 2001 ; on trouvera en notes des éléments complémentaires issus de trois autres manuels Mare Nostrum 2003, Santillana 2001 y Zig-Zag 2003 .

Ce chapitre comporte 46 pages.

Ces pages différencient ce qui semble être le cours et des rubriques encadrées intitulées suivant les cas Actividad personal , Actividad grupal, Para explorar.

- Deux pages d'introduction rappellent les apprentissages attendus et lient le chapitre à venir avec les problèmes rencontrés par les architectes qui doivent réaliser des plans et des maquettes pour représenter fidèlement la réalité.
- Quatre pages reviennent sur des connaissances rencontrées les années précédentes.
- Deux pages définissent un projet, intitulé « Cine y Proporcionalidad » que les élèves doivent mener en groupe, projet consacré au cinéma au cours duquel ils devraient notamment rencontrer la notion d'image comprimée, s'informer sur les différents types de projecteur et en donner une représentation à l'échelle, utiliser le plan à l'échelle d'une salle de cinéma pour différents calculs (par exemple, taille sur l'écran de la projection d'un objet suivant sa position dans la salle, variation de la taille de l'image si on déplace le projecteur).

On aborde ensuite successivement les thèmes suivants, chacun sur deux pages :

- *Figures semblables* : un travail introductif sur deux photographies de la même bâtisse, font constater par mesures effectuées par les élèves la proportionnalité des longueurs et l'égalité des angles. On généralise en posant comme définition que des figures sont semblables si elles ont la même forme. Un énoncé précise, sans plus de validation que ce qui a été fait précédemment sur les photographies, que des polygones sont semblables s'ils ont le même nombre de côtés, des longueurs des côtés correspondants proportionnelles et les angles correspondants égaux. Est-ce une définition ? Le texte est ambigu puisque la rubrique qui énonce ce résultat est intitulée « Resumiendo ». Les exercices s'interrogent sur la similitude de polygones particuliers.
- *Comment obtenir des figures semblables* : deux procédés sont présentés, par utilisation d'un quadrillage superposé au dessin à agrandir, par projection polaire (le terme homothétie n'est pas introduit à ce moment mais ce chapitre consacrera plus loin 3 pages à cette transformation faisant démontrer aux élèves en exercice que les côtés homologues de deux polygones homothétiques sont parallèles et que deux polygones homothétiques sont semblables -notons que ceci ne figure pas au programme mais complète le panorama des notions traitées dans cette unité). Les exercices font construire des homothétiques, notamment de rectangles en prenant un des sommets puis le centre du rectangle comme centre de l'homothétie. Le pantographe est évoqué, plus loin une page intitulée Atelier, est consacrée à la réalisation effective d'un pantographe.
- *Plans, maquettes et cartes.*
  Sur les neuf exercices proposés, quatre demandent de calculer des dimensions réelles connaissant la dimension sur le plan et l'échelle (les élèves n'ont pas à mesurer euxmêmes), un demande de déterminer l'échelle connaissant les deux mesures utiles,

deux consistent à réaliser un plan, de la maison de l'élève au 1 : 100 et, avec le professeur d'histoire, un plan du collège ou du quartier (échelle non précisée).

- *Théorème de Thalès et ses corollaires.*
  Une activité basée sur des mesures effectives réalisées par les élèves vise à faire constater la proportionnalité des segments homologues déterminés par des droites parallèles, d'abord équidistantes puis dans le cas général. Le théorème est alors énoncé sans autre commentaire, c'est-à-dire qu'il n'est pas signalé qu'il n'a pas été démontré. Notons que c'est la version la plus générale du Théorème de Thalès qui est enseignée. Sont ensuite énoncés des corollaires du théorème, sans démonstration : cas des triangles homothétiques dans les deux cas de figure (corollaires 1 et 2), réciproque (aucune hypothèse ne porte sur l'ordre des points), extension du premier corollaire au cas où trois droites sécantes en A sont coupées par deux parallèles. Les 6 exercices consistent à calculer des longueurs.
- *Similitudes de triangles.*
  Cette partie est un prolongement direct de la partie précédente. Après avoir rappelé la définition de triangles semblables (angles égaux et côtés proportionnels), on fait démontrer aux élèves le fait qu'étant donné un triangle ABC, une droite parallèle à un côté du triangle détermine un triangle semblable à ABC (Théorème fondamental de similitude). Tous les exercices portent sur des triangles issus de configuration de Thalès.
- *Critères de similitude* : les critères sont énoncés sans démonstration, il est seulement · dit qu'ils peuvent être établis par le Théorème fondamental de similitude. Un exercice fait contrôler la similitude de triangles

Trois pages sont ensuite consacrées aux applications de la similitude de triangles au calcul de longueurs (détermination d'une hauteur par mesure de l'ombre, par visée, distance inaccessible par visée). Dans ces trois cas, le texte décrit le procédé de manière générale. Pour les deux premiers problèmes, les connaissances acquises permettent d'obtenir le résultat cherché par calcul. Dans le troisième cas, il s'agit de déterminer les côtés d'un triangle connaissant la mesure d'un côté et deux angles. Les élèves n'ont pas à ce niveau les connaissances nécessaires pour traiter ce problème par calcul. La méthode proposée consiste à dessiner une représentation à l'échelle : il faut noter qu'à ce moment, un théorème permet de justifier qu'en reproduisant les deux angles, le triangle obtenu est bien semblable au triangle d'origine (le manuel fait explicitement référence à l'application du critère en question) ; il faut alors mesurer sur le dessin la longueur homologue à la longueur cherchée qui s'obtient ensuite en appliquant l'échelle utilisée.

Les exercices d'application proposés fournissent dans ce manuel toutes les mesures nécessaires. Un schéma modélisant géométriquement les situations accompagne l'énoncé. Un des exercices toutefois doit être distingué : il reprend la situation de détermination par double visée qui nécessite la réalisation d'un dessin à l'échelle et conduit les élèves à mesurer sur le dessin ; de plus, le schéma qui illustre l'énoncé est une vue en perspective qui ne préserve pas l'une des données essentielles du cas particulier étudié (angles de 30 et 120) à savoir le fait que le triangle étudié est isocèle. La schématisation proposée est donc insuffisante, il faut en produire une autre.

Ce chapitre contient ensuite deux pages consacrées à l'apprentissage de la démonstration, précisant les notions d'hypothèse et de conclusion (Hipótesis, Tesis).

Suivent cinq pages consacrées à la similitude de polygones. Après avoir formulé une conjecture concernant le périmètre et l'aire de carrés et de triangles équilatéraux semblables, le manuel établit quatre théorèmes (les énoncés sont désignés comme tels) qui permettent in fine d'établir la relation des aires et des périmètres de deux polygones semblables. La démonstration de ces derniers résultats est laissée à la charge des élèves, le manuel donnant les démonstrations des quatre théorèmes intermédiaires. On peut remarquer que ces démonstrations ne sont pas mises en texte mais sont présentées sous forme de tableaux.

Deux pages présentent la méthode pour diviser un segment donné dans un rapport rationnel donné (méthode présentée de manière générale, démonstration laissée à l'élève). Suivent 3 pages centrées sur la division dorée. Le nombre d'or est présenté comme solution à une condition de proportions, il est précisé qu'il est irrationnel, deux constructions géométriques sont proposées : la première est présentée dans la partie cours, sa justification, qui est demandée aux élèves, repose sur le théorème de Pythagore, la seconde est l'objet d'un exercice assez guidé, la justification s'appuie sur la similitude de triangles isocèles. On définit enfin ce qu'est un rectangle d'or, un exercice donne un procédé de construction et demande de justifier que le rectangle obtenu est bien doré.

Les deux dernières pages présentent des éléments culturels directement inspirés par les suggestions des Dacc.

Les exercices proposés en fin de chapitre, dans la rubrique Evaluación sont de forme classique : il s'agit d'utiliser les théorèmes du chapitre pour calculer des dimensions ou montrer que des triangles sont semblables. L'élève n'a jamais à procéder lui-même à des mesures. Notons cependant deux exercices plus particuliers :

> "Si deseas conocer la altura de un poste y dispones de un espejo, una huincha de medir y la buena voluntad de un amigo, ¿qué harías para calcularla ?"p.91
>
> "Una persona desea determinar la distancia desde un punto P de la playa a un barco que se encuentra en alta mar frente a P. ¿Cómo puede calcular dicha distancia ?" p. 93

Conclusion

Le manuel reprend l'ensemble des contenus de connaissance figurant dans le programme et les Dacc, les étendant dans une certaine mesure avec une étude formelle de l'homothétie, un procédé de construction du nombre d'or et un très long travail sur les polygones semblables et leurs aires dont les résultats prennent la forme de théorèmes.

Le manuel respecte une certaine stratégie de construction du sens des concepts ou des théorèmes de l'unité mais les choix ne sont pas exactement les mêmes que ceux des Dacc : un travail de familiarisation avec la notion de figures semblables est effectivement proposé, relativement proche de celui que suggèrent les Dacc ; pour les théorèmes, le théorème de Thalès est introduit en premier et il est préparé par un travail de mesurage, les critères de similitude ne font l'objet d'aucune exploration préliminaire. Aucun de ces résultats n'est démontré et l'on ne trouve aucune expression du fait que de tels résultats ont un statut à part (théorèmes admis)[7].

[7] Le Mare Nostrum propose une activité expérimentale de découverte du corollaire 1 du théorème de Thalès dans le cas où les droites sont équidistantes (obtenues par pliages, mesures obtenues par comptage des écarts ou mesures) et ensuite le résultat est admis. Les autres résultats liés au Théorème de Thalès ne sont pas abordés. Par contre, ce manuel donne une démonstration de l'un des critères de similitude.

Le Santillana propose une démonstration du théorème de Thalès dans le triangle par les aires (sans l'égalité du rapport des côtés parallèles). Ensuite, il propose en activités de démontrer le théorème de Thalès général, sa réciproque et le deuxième corollaire. L'un des critères de similitude est enfin démontré (3 angles égaux).

Le Zig-Zag prépare l'énoncé général du théorème de Thalès par une vérification expérimentale par mesure et donne une démonstration par les aires. Il présente ensuite les corollaires dans le triangle (pour le premier, le manuel donne les figures qui supportent la démonstration par les aires et demande aux élèves

Concernant les applications aux situations de détermination de mesures, les méthodes sont décrites de manière générique mais les exercices donnent les mesures nécessaires. Aucune mise en situation réelle n'est évoquée. Les schémas utiles sont fournis. Les élèves n'ont donc ni à mesurer eux-mêmes, ni à modéliser la situation.

Nous retiendrons cependant un fait qui contredit cette éviction du mesurage. Une des méthodes décrites suppose de réaliser à l'échelle un dessin sur lequel est ensuite mesurée la distance cherchée[8]. Ainsi, une activité du cours de mathématique envisage, à ce niveau de la scolarité, qu'une réponse puisse être déterminée à partir d'un travail dans la Géométrie I.

Notons que les résultats théoriques au programme concernant les cas de similitude des triangles peuvent être utilisés pour justifier les trois techniques permettant d'obtenir une représentation à une échelle donnée d'un triangle donné : 1. à partir des longueurs des trois côtés, 2. de deux côtés et de l'angle qu'ils déterminent, 3. de la longueur d'un côté et des deux angles qui lui sont adjacents. Cette dernière technique qui ne nécessite même pas de connaître l'échelle est celle qui est utilisée pour déterminer une distance inaccessible à partir de deux visées angulaires et d'une mesure de distance. Ces mêmes résultats théoriques permettent également de justifier les techniques permettant d'obtenir des informations relatives à la situation réelle (mesure d'angle ou de longueur) à partir de mesures sur la représentation à l'échelle : par exemple, on peut justifier la proportionnalité des hauteurs ou médianes. L'organisation mathématique chilienne peut donc intégrer des techniques de production et de lecture de dessins à l'échelle (travail situé dans GI) en les justifiant par des résultats théoriques relevant de GII (nous sommes ici en présence de ce

---

une rédaction ; pour le second, tout est à la charge des élèves). Une activité de vérification par mesures des différentes formes du théorème de Thalès conclue cette partie. La réciproque n'est pas évoquée. Les critères de similitude sont donnés sans démonstration ; l'un d'entre eux est l'objet d'une vérification par mesure.

Les 4 manuels examinés traitent donc en premier du théorème de Thalès

[8]Le Mare Nostrum présente le même type de situations et recourt abondamment au mesurage sur dessin à l'échelle. Ce manuel commence par 10 pages consacrées à des problèmes de déterminations de distances. 7 situations sont présentées, 4 d'entre elles nécessitent de mesurer certaines longueurs :

– Détermination de l'aire d'un terrain en forme de quadrilatère connaissant les mesures des 4 côtés et de la diagonale ;
– résolu par représentation à l'échelle, décomposition en triangles et mesures des hauteurs nécessaires ;
– Détermination de la hauteur d'un araucaria si on n'a pas accès à son pied ; résolu par double visée, représentation à l'échelle et mesure sur le dessin · Détermination des dimensions d'une maison à partir d'un plan dont l'échelle est connue (mesure sur le plan)
– Détermination des distances séparant des lieux à partir d'une carte (mesure sur le plan).

Le Zig-Zag introduit la problématique du chapitre d'une manière assez proche de celle de l'Arrayán en posant la problématique de la représentation sans déformation. Ceci donne lieu à 4 activités impliquant la réalisation de mesures sur des plans, cartes ou photographies ; l'effet des erreurs de mesures sur le résultat est abordé numériquement. Il est également fait référence dans cette partie introductive à des problèmes de détermination de grandeurs inaccessibles abordés par Thalès : mesure de la hauteur de la grande pyramide et détermination de la distance d'une barque au rivage. Une activité de groupes très guidée propose de vérifier expérimentalement la proportionnalité de la hauteur d'un bâton et de son ombre. Ce manuel reprend en application toutes les activités de détermination de mesures suggérées par les Dacc. Mais aucune mise en situation réelle n'est suggérée, pas même des applications numériques dans le cadre de la classe à partir de mesures données. Cette partie apparaît comme une information culturelle sans véritable importance dans le cadre du cours de mathématiques. Ce manuel ne présente pas la situation nécessitant mesure sur la représentation à l'échelle que nous avons remarquée dans l'Arrayán et le Mare Nostrum. Si l'acte de mesurer n'est pas absent de ce manuel, c'est exclusivement dans le but d'introduire ou de vérifier les théorèmes. Une fois ceux-ci introduits, on évite de revenir dans un espace de travail interne à GI. Au contraire, de nombreuses applications géométriques sont proposées comme la démonstration des théorèmes dits d'Euclide dans le triangle rectangle (cf 3M Dacc), du concours des médianes d'un triangle ou, en application des homothéties, la construction d'un carré inscrit dans un triangle acutangle. On est alors très proche de la pratique rencontrée dans les manuels français.

qu'Y. Chevallard nomme technologie de la technique –logos de la techne)

Enfin, la dimension historique et artistique de l'unité est respectée avec un travail approfondi sur la raison dorée complété par quelques informations d'ordre artistique sur la divine proportion .

Ce manuel apparaît donc assez fidèle aux textes ministériels dans les contenus. Par contre, on ne peut pas dire qu'il reprenne à son compte l'organisation du travail des élèves dans les situations de recherche suggérées par les Dacc.

L'étude des autres manuels montre une certaine variabilité : si nous trouvons une constante intention de lier le thème abordé à la nécessité d'une représentation fidèle du monde et d'introduire expérimentalement les théorèmes enseignés, des variations ont été repérées au niveau du nombre de démonstrations proposées, du recours à la mesure dans les situations d'application et enfin de la place accordée aux dimensions historiques et artistiques.

4.3.2 Approche française

L'organisation française est comme nous allons le voir sensiblement différente dans la mesure où l'enseignement de ce qui au Chili est essentiellement enseigné en 2M s'étend sur plusieurs années. Ceci nous conduit à adopter dans ce qui suit une organisation différente de celle que nous avons utilisée dans la partie I : pour chaque année, nous présenterons dans la même section l'analyse des textes et des manuels.

Cinquième : représentation à l'échelle

La représentation à l'échelle apparaît dans l'organisation française au sein de la partie Gestion des Données, plus précisément dans le cadre de la proportionnalité.

> A.Travaux géométriques p.45.
>
> Contenu : Construction de triangles
>
> Compétences exigibles : Construire un triangle connaissant la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents, les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés, la longueur des trois côtés.
>
> C. Organisation et gestion de données, fonctions p.49
>
> Contenus 2. Exemples de fonctions. Proportionnalité
>
> Compétences exigibles : [...] Mettre en œuvre la proportionnalité dans les cas suivants : utiliser des unités combinant le système décimal et le système sexagésimal (mesure du temps), calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin, reconnaître un mouvement uniforme [...], calculer un pourcentage, un coefficient de proportionnalité, effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure.

L'accent est mis sur la proportionnalité des mesures. Les élèves disposent de connaissances concernant la construction de triangles. Par contre, ils ne disposent ni du théorème de Thalès ni des cas de similitude. Dans ces conditions, la seule technique de construction d'un triangle à l'échelle qui puisse être étayée repose sur la donnée des 3 longueurs ; aucune technologie compatible avec le paradigme géométrique GII installé en 5^e n'est disponible pour fonder une autre technique. De même, on ne peut pas justifier qu'un triangle ayant été ainsi construit, les distances mesurées à l'aide de cette représentation seront bien proportionnelles aux dimensions de l'objet représenté et les angles égaux. Pour être utilisé, ces résultats devraient recevoir le statut de théorèmes admis.

Analyse de manuels

Nous avons examiné dans un premier temps le cours proposé par quatre manuels (Edition 2001) :

1. Nouveau Décimale (Belin), Ch.6 Autour de la proportionnalité ;
2. Cinq sur Cinq (Hachette), Chapitre 7 Reconnaître et utiliser la proportionnalité ;
3. Triangle (Hatier), Chapitre 6 Pourcentages, échelles ;
4. Transmath (Nathan), Ch.6 Proportionnalité.

Dans les manuels, la notion même de représentation à l'échelle est considérée comme une connaissance déjà là. Partant de cet a priori, deux manuels (Cinq sur Cinq, Transmath) affirment que, pour un plan, toutes les longueurs sont proportionnelles entre elles, le coefficient de proportionnalité étant appelé l'échelle. Ils ne cherchent ni à justifier cette propriété ni même à la faire vérifier sur un exemple. La proportionnalité de toutes les longueurs est une donnée dont on peut noter qu'elle ne prend pas le statut de théorème (ni admis, ni évidemment démontré), ceci contredit la recommandation du programme pour le cycle central : « pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré. »(Programme du cycle central p.41). Est-ce à dire que ce résultat n'est pas considéré comme mathématique ? Tout comme pour la notion même de plan à l'échelle, le cours de mathématique s'appuie sur une connaissance sociale sans l'intégrer à son propre corpus de savoirs.

Nouveau Décimale prend un peu plus de précaution en proposant d'abord en activité de vérifier la proportionnalité de trois longueurs à partir des données relevées sur un plan côté puis en posant ce qui peut être considéré comme une définition des représentations à l'échelle : « Lorsque les longueurs sur une reproduction (carte, plan, dessin...) sont proportionnelles aux longueurs réelles qu'elles représentent, l'échelle de la reproduction est le quotient e = longueur sur la reproduction/longueur réelle ... ». Triangle pose également ce style de définition, sans vérification expérimentale antérieure.

Mais, quelle que soit l'approche choisie, aucun de ces manuels ne se demande comment obtenir une représentation telle que la condition de proportionnalité de toutes les longueurs soit vérifiée. Le cours n'aborde pas la question de la réalisation de dessins à l'échelle. Remarquons que le programme ne mentionne pas ce type de travail. Pourtant, une technique au moins serait accessible pour construire un triangle à l'échelle (à partir de la longueur des côtés). Ce travail permettrait de construire par triangulation des polygones à l'échelle et de faire vérifier ensuite la proportionnalité de longueurs associées (hauteurs, médianes, diagonales) ; on pourrait ainsi donner un statut de théorème géométrique en Géométrie II (vérifié sur des exemples, non démontrés mais admis) à la proportionnalité des longueurs et à l'égalité des angles. Mais ceci n'est pas le point de vue adopté. La question de la conservation des formes, de l'invariance des angles n'est pas traitée ; le pantographe n'est pas évoqué.
En résumé, la notion d'échelle n'est pas abordée dans le contexte géométrique, c'est purement une affaire de proportionnalité de longueurs envisagées comme étant indépendantes les unes des autres.

On peut supposer que l'absence de technologie mathématique adéquate relègue la représentation à l'échelle et la propriété de proportionnalité des longueurs en dehors du domaine géométrique, focalisant le travail sur des techniques de calcul de longueurs ou d'échelle, justifiées dans le domaine numérique par la technologie de la proportionnalité.

Retrouve-t-on cette priorité au numérique dans les tâches proposées aux élèves ?

Une analyse des activités d'introduction et exercices proposés par les manuels étudiés nous permet de répondre à cette question[9].

Dans l'ensemble des exercices, la proportion de ceux qui sont consacrés aux représentations à l'échelle est variable (de 13 sur 119 dans Transmath à 25 sur 70 dans Triangle), ce thème peut donc être assez marginal.

Différents types de tâches mettent en jeu les représentations à l'échelle :

Dans le premier, on part d'une situation réelle, représentée à une échelle connue et il faut calculer une longueur sur le plan ; la mesure réelle peut être fournie par l'énoncé ou à déterminer par l'élève ; nous avons incorporé dans ce groupe, les exercices qui par proportionnalité permettent de déterminer une longueur sur le plan à partir d'une longueur sur le plan et de deux longueurs réelles.

Dans le deuxième type de tâches, le propos est de déterminer l'échelle ; une ou deux mesures (au sens action de mesurer) peuvent être nécessaires, dans la situation réelle d'une part et/ou sur le plan.

Enfin, le troisième type consiste à déterminer une longueur réelle à partir d'une longueur sur le plan, mesurée ou donnée, et de l'échelle ; nous avons incorporé dans ce groupe, les exercices qui par proportionnalité permettent de déterminer une longueur réelle à partir de deux longueurs sur le plan et d'une longueur réelle.

Dans les quatre manuels, le nombre d'exercices demandant la réalisation d'un dessin à l'échelle est assez faible (Triangle : 5/25, Cinq sur Cinq : 3/22, Nouveau Décimale : 1/14, Transmath 2/13). Aucune activité ne demande un tel travail.

Cette réalisation n'est jamais à l'initiative de l'élève et le plan n'est pas utilisé pour obtenir une information dans le domaine réel[10]. De plus, si l'on excepte deux exercices du Triangle, l'élève n'a pas à mesurer lui-même dans le contexte réel.

La conservation de la forme et des angles est en jeu dans ces exercices de représentation. En premier lieu avec la conservation de l'orthogonalité pour la représentation de rectangles (5 exercices) ou éventuellement d'un losange (1fois). Dans Triangle et Transmath, on trouve au moins un exercice s'appuyant sur la conservation d'angles moins spécifiques, avec dans le premier manuel, le cas d'un hexagone régulier et dans le second la représentation d'un secteur angulaire dont l'angle a été calculé pour l'objet réel.

Aucun exercice ne confronte l'élève à la question de la proportionnalité avec les longueurs correspondantes réelles de longueurs obtenues indirectement sur le plan (par exemple, si on construit un rectangle grâce à ses côtés et à la conservation de l'angle droit, on obtient de fait une représentation de ses diagonales, sans avoir utilisé leur mesure).

Le nombre d'exercices nécessitant d'effectuer une mesure est lui aussi faible, sauf dans le Transmath, par comparaison avec celui des exercices dans lesquelles toutes les mesures sont données (Cinq sur Cinq : 4 pour 18, Nouveau Décimale : 3 pour 11, Transmath : 4 pour 9 ; Triangle : 3 pour 23). On note même dans les manuels Triangle et Cinq sur Cinq la présence d'exercices dans lesquels la mesure est donnée alors que l'élève aurait pu la mesurer.

[9]Quand nous parlons d'exercices, il s'agit des énoncés figurant en fin de chapitre ; leur fonction, comme le terme l'indique, est d'exercer les élèves à l'utilisation des résultats du cours. Les activités sont des travaux situés avant le cours dans les manuels ; leur fonction est d'introduire le cours.

[10]Nouveau Décimale, en activité pose le problème de la détermination d'une distance connaissant une longueur et deux angles puis réinvestit la démarche dans deux exercices (détermination de la hauteur d'une tour, du troisième côté d'un triangle connaissant deux côtés et un angle). Ces exercices sont résolus par mesure sur une représentation à l'échelle comme en 2M au Chili. Ceci est le seul exemple d'une situation utilisant une représentation à l'échelle pour obtenir une information rencontrée dans les 5 manuels analysés.

Si l'on s'intéresse au nombre d'exercices qui utilisent pour des calculs ultérieurs les données calculées à partir des longueurs mesurées, on obtient un comportement variable suivant les manuels : Nouveau Décimale : 0/3, Triangle : 1/3, Transmath : 2/4, Cinq sur Cinq : 3/4). La démarche de mesure n'est donc pas mise en évidence en tant qu'outil intégré à une démarche de résolution de problèmes concernant le monde réel.

Conclusion

La représentation à l'échelle n'est pas étudiée du point de vue de sa réalisation. Les élèves sont très peu amenés à tracer des représentations. Toutefois dans les quelques exemples où ils le sont, la conservation de la forme et des angles (surtout des angles droits) est une propriété nécessaire. Comment le professeur de mathématiques gère-t-il la contradiction entre le silence du cours sur ce point et l'implication de cette propriété ? Nous ne le savons pas.

La fonctionnalité de la représentation à l'échelle est au mieux évoquée dans des exercices qui ne cherchent pas à faire dévolution aux élèves de véritables questions concrètes que la représentation à l'échelle permettrait de traiter. En particulier, dans tous les cas, l'existence d'un plan est une donnée de l'énoncé ; les élèves n'ont jamais à prendre l'initiative d'en construire un à une échelle qu'ils choisiraient. Sauf cas exceptionnels, les exercices se réduisent au calcul d'une longueur (dans la réalité ou sur le plan) ou de l'échelle sans utiliser la réponse obtenue dans des questions ultérieures. Enfin, l'acte de mesurer, dans le réel pour réaliser le plan ou sur le plan, pour en déduire des informations concernant le réel, est massivement évacué .

Quatrième/Troisième : théorème de Thalès, division d'un segment dans un rapport donné, effet de l'agrandissement-réduction sur les aires et les volumes

La question des représentations à l'échelle n'est plus mentionnée explicitement dans les programmes de 4^e et 3^e. Toutefois en 3^e, la rubrique « Proportionnalité et traitements usuels sur les grandeurs » aborde la question des grandeurs composées :

> p.86 Commentaires : Les grandeurs produits sont, après les grandeurs quotients déjà rencontrées en classe de quatrième, les grandeurs composées les plus simples. On pourra remarquer que les aires et les volumes sont des grandeurs produits.

Par ailleurs, au sein de cette même rubrique, sont abordés les effets d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires et volumes avec un commentaire qui fait le lien avec le travail accompli en géométrie dans l'espace :

> p. 77. Contenus : Problèmes de sections planes. Compétences exigibles : [...] Représenter et déterminer les sections d'un cône de révolution et d'une pyramide par un plan parallèle à la base.

Ces deux contextes peuvent donc donner lieu en 3^e à un retour sur des représentations à l'échelle. L'intérêt du chapitre sur les sections planes est de faire apparaître sans le dire des figures homothétiques.

Par ailleurs, en géométrie, le théorème de la droite des milieux et sa réciproque ainsi que le théorème de Thalès dans une configuration particulière que l'on peut lier à l'agrandissement/réduction apparaissent en 4^e, le cas général du théorème de Thalès et sa réciproque sont vus en 3^e.

> 4^e p. 51 Compétences : Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes

> Commentaires : l'égalité des trois rapports sera admise après d'éventuelles études dans des cas particuliers ; [...]on n'examinera pas le cas où les demi-droites [AM) et [AB), de même que les demi-droites [AN) et [AC) sont opposées.
>
> 3^e p. 78 Contenus : Propriété de Thalès
>
> Il s'agit d'un prolongement de l'étude faite en classe de 4^e en abordant le cas où les demi-droites envisagées ci-dessus sont de sens contraire ainsi qu'une réciproque faisant intervenir l'ordre des points. [...] On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donnés deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport CA/CB a une valeur donnée sous forme de quotients d'entiers.

Notons que le théorème de Thalès général (conservation des rapports par projection parallèle) ne figure pas au programme.

Analyse de manuels

Nous avons analysé les manuels de 4^e et 3^e des collections étudiées pour la 5^e. (Cinq sur Cinq, Nouveau Décimale, Transmath, Triangle – 4^e édition 2002, 3^e édition 2003).

Dans tous les manuels de 4^e et de 3^e examinés, le théorème de Thalès est interprété dans le cours en terme de proportionnalité sous la forme égalité de rapports. Une seule collection (Nouveau Décimale) met en évidence l'existence d'un coefficient multiplicatif (opérateur entre lignes du tableau de proportionnalité en 4^e, formulation linéaire AM = kAN en 3^e). Mais, comme tous les autres, ces deux manuels ne font jamais référence aux notions d'agrandissement/réduction ou d'échelle dans le chapitre consacré au théorème de Thalès.

Les angles sont totalement absents de la partie cours dans tous les cas ; le fait que dans une configuration de Thalès, les deux triangles aient les angles homologues égaux n'est donc jamais mis en évidence. Dans chaque manuel, un nombre très réduit d'exercices (maximum 5 sur 61, Nouveau Décimale) met en jeu des angles ; il s'agit alors de prouver un parallélisme grâce aux valeurs connues. Deux manuels seulement, Triangle et Cinq sur Cinq, posent des exercices utilisant la réciproque du théorème de Thalès (cas particulier des milieux, en 4^e) pour déduire des propriétés angulaires.

Le théorème de Thalès ne donne pas lieu à des exercices mettant en jeu la notion de représentation à l'échelle ou dans lequel l'élève serait amené à produire un agrandissement d'un dessin donné. Enfin, le nombre d'exercices utilisant le théorème de Thalès pour résoudre des problèmes concrets est variable mais reste réduit, surtout en 4^e (4^e : de 0 dans Triangle à 4 sur 61 énoncés – 6.6 % – dans Nouveau Décimale ; en 3^e : de 3 sur 64 dans Cinq sur Cinq – 4.7% – à 6 sur 57 –10.5 % – Nouveau Décimale) ; en aucun cas, les élèves n'ont à effectuer une mesure.

La problématique des représentations à l'échelle est en réalité quasi-absente des manuels de 4^e (sur la totalité des chapitres, pas d'exercice dans Cinq sur Cinq, 2 dans Transmath et 1 dans les deux derniers ; un seul exercice suppose que les élèves effectuent une mesure).

Concernant la validation du théorème de Thalès, deux stratégies sont combinées en 4^e : vérification par mesure sur un ou quelques cas, en nombre très limité (la notion de conjecture est alors utilisée), démonstration à partir du théorème des milieux dans un cas particulier (rapport numérique fractionnaire simple). Le théorème est ensuite admis. Ce contexte est le seul qui donne lieu à la réalisation de mesures par les élèves.

En 3^e, la généralisation du théorème au cas où les triangles sont *opposés par le sommet* est l'objet d'une démonstration utilisant une symétrie centrale.

Concernant l'agrandissement/réduction et son effet sur les grandeurs aire et volume en 3^e, on rencontre deux stratégies. Trois manuels reviennent sur les représentations à l'échelle dans un chapitre spécifiquement consacré à la proportionnalité, l'autre (Cinq sur

Cinq) aborde ce point dans le cadre du chapitre sur la géométrie dans l'espace.

Pour ce manuel, un rappel rapproche en géométrie plane représentation à l'échelle et agrandissement/réduction en notant la conservation des angles et des formes ; les idées de réduction et de modèle réduit sont reprises pour les sections de pyramides ; on peut considérer que les dessins en perspective réalisés pour ces sections ainsi que l'emploi du théorème de Thalès pour les démonstrations réalisent un rapprochement (qui reste cependant implicite) du théorème de Thalès avec les problématiques précédentes.

Pour les autres manuels, l'approche est variable. Transmath a une approche unificatrice comparable à celle du Cinq sur Cinq (identification de la représentation à l'échelle k et de l'agrandissement/réduction de rapport k, mise en évidence sur un exemple de la propriété de conservation des angles, association configuration de Thalès/agrandissement, association section d'un cône/agrandissement). Nouveau Décimale par contre s'en tient strictement aux instructions du programme abordant l'effet de l'agrandissement/réduction sur les aires et volumes dans le chapitre sur la proportionnalité, l'idée de réduction pour les sections de pyramide et cônes dans le chapitre sur la géométrie dans l'espace. Il n'y a pas de réflexion relative aux angles et la notion d'échelle n'est pas intégrée. Quant à la liaison avec Thalès, elle reste implicite comme dans Cinq sur Cinq. Le dernier manuel a une stratégie intermédiaire entre les deux précédents.

Conclusion

La classe de Troisième donne lieu dans certains manuels à une reprise unificatrice dans un contexte géométrique de la notion de représentation à l'échelle (5^e) et du théorème de Thalès (4^e-3^e) en ajoutant la démarche d'agrandissement/réduction et l'observation de la conservation des angles. Mais ceci n'est pas obligatoire : conformément au programme, on peut laisser de côté le point de vue angulaire et l'échelle, s'en tenir à l'agrandissement/réduction et son effet sur les grandeurs, ne sollicitant le théorème de Thalès et les configurations associées qu'en tant qu'outil pour l'étude des sections de pyramide.

Le théorème de Thalès est admis après vérification expérimentale et démonstration sur cas particulier en 4^e, généralisé par démonstration en 3^e.

Seconde : triangles de même forme

Les objectifs principaux de la géométrie enseignée en Seconde sont au nombre de deux :

> Développer la vision de l'espace ;
>
> Proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes du collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires.

Le programme souhaite s'inscrire dans la continuité du collège, en évitant toute nouvelle piste. Il s'agit de clore pour la majorité des élèves leur apprentissage de la géométrie.

Le programme de Seconde introduit les notions de triangles isométriques et de triangles de même forme. Il n'y a pas dans le programme de définition des triangles isométriques mais on trouve dans la brochure d'accompagnement la précision suivante (p.17) :

> Cela supposera au préalable le choix par l'enseignant d'une définition des triangles isométriques ; celle qui s'inscrit le plus naturellement dans le fil des programmes du collège, où l'on a construit des images de figures géométriques par symétries axiale ou centrale, par translation ou par rotation pourrait s'énoncer ainsi : deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une translation, une rotation, une symétrie axiale ou une succession de telles transformations. Une autre définition, plus

> intuitive, pourrait être : deux triangles sont isométriques s'ils ont des côtés et des angles respectivement égaux .

Ainsi d'emblée nommés « triangles isométriques », les triangles congruents sont mis en relation avec les transformations rencontrées au Collège. Il n'en est pas de même pour les triangles semblables : faute d'introduire en Seconde les notions d'homothétie et de similitude, les programmes s'interdisent l'emploi de cette expression et parlent de « triangles de même forme ». Cette frilosité est d'une certaine manière en contradiction avec la tendance générale des programmes français qui font des transformations une dimension essentielle de la géométrie (comme il a été vu précédemment, le groupe des similitudes est l'aboutissement du programme de la section scientifique). Ceci correspond à la volonté signalée plus haut de faire de l'année de Seconde en géométrie une année de clôture.

Pour les triangles de même forme, les commentaires précisent :

> On pourra utiliser la définition suivante « deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre ».

Notons que la définition proposée pour les triangles semblables est minimale, contrairement à celle qui est adoptée au Chili et contrairement à la seconde définition proposée par les textes d'accompagnement pour les triangles isométriques.

Analyse de manuels

L'analyse de neuf manuels de Seconde[11]) montre que 5 d'entre eux ne suivent pas les recommandations officielles pour la définition des triangles isométriques. Pour eux, deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont des côtés égaux, cette définition est minimale. Parmi les 4 derniers, 3 choisissent la première définition référant aux transformations, un la seconde définition (égalité des côtés et des angles).

Tous les manuels choisis adoptent la définition figurant dans les textes pour les triangles de même forme.

Lien avec les notions d'échelle, de proportionnalité et d'agrandissement/réduction.

Ni dans les textes officiels ni dans les 9 manuels examinés la notion de triangles semblables n'est liée à la problématique des représentations à l'échelle. Par contre, elle est évidemment associée dans le cours à la proportionnalité dans tous les cas et à l'idée d'agrandissement/réduction dans 7 manuels sur 9 examinés, ce qui est un changement par rapport au traitement du théorème de Thalès dans les manuels de 3^e^ (Transmath est le seul manuel qui ne fait pas du tout cette association ; Nouveau Pythagore ne la mentionne qu'incidemment dans un TP consacré à un objet fractal, le triangle de Sierpinski).

Les manuels s'intéressent-ils à la réalisation de triangles semblables ?

Tous font un lien entre configuration de Thalès et triangles semblables, ne serait-ce que pour démontrer les cas de similitudes mais ce lien n'est clairement mis en avant comme une méthode permettant d'obtenir un triangle semblable à un triangle donné que dans un manuel (Belin) qui est le seul à véritablement poser comme un problème à résoudre la question de la construction d'un triangle isométrique, puis semblable à un triangle donné. Au total, 3 manuels sur 9 seulement présentent à un moment donné un procédé permettant d'obtenir un triangle semblable à un triangle donné. 6 font construire des triangles dont trois mesures sont données numériquement, essentiellement dans des cas qui déterminent le triangle à isométrie près. Enfin deux manuels ne soumettent jamais les élèves à une

[11] Belin, Fractale et Indice (Bordas), Bréal, Delagrave, Déclic et Pyramide (Hachette), Nouveau Pythagore (Hatier), Transmath (Nathan), édition 200

tâche de construction de triangles dans le chapitre consacré aux triangles isométriques et de même forme.

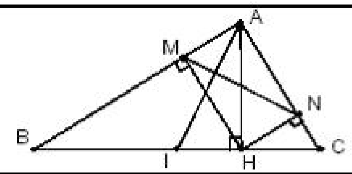
Quel est l'espace de travail proposé aux élèves ?

On l'a vu, la Géométrie II est, en France, mise en place de manière implicite à partir de la Cinquième, sinon de la Sixième, par un changement du statut du dessin et par une insistance mises sur les règles de la démonstration. Le programme de Seconde se situe totalement dans cette perspective :

> « Les problèmes seront choisis de façon
> à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité,
> à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive,
> à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque). »

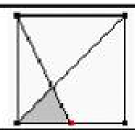
L'accent est mis sur le travail interne à la Géométrie II. Ainsi les Dacc qui annoncent vouloir par les exercices proposés de montrer " l'intérêt du point de vue nouveau des triangles isométriques et de même forme " ne proposent aucune situation issue de problèmes concrets. Les énoncés sont strictement internes au modèle :

3.2 ABC est rectangle en A ; H est le pied de la hauteur ; M et N sont les projections orthogonales de H sur les côtés ; I est le milieu de BC.
Des triangles rectangles semblables ?
Hauteur et médiane du triangle AMN ?



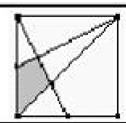
Commentaire : il y en a neuf sur dix !

3.3 Dans le carré, on a tracé une diagonale et un segment joignant un sommet et le milieu d'un côté.
Rapport entre l'aire de la zone grisée et l'aire du carré ?



Indication : reconnaître deux triangles semblables, d'où la hauteur du triangle grisé.

3.4 Dans le carré, on a tracé une diagonale et des segments joignant sommets et milieux de côtés.
Rapport entre l'aire de la zone grisée et l'aire du carré ?



Indication : reconnaître des triangles rectangles semblables.

FIG. 4.7 – Un problème de grandeurs inaccessibles

Notons avec un peu d'ironie que ces exemples officiels illustrent la remarque des programmes sur le fait que « de tels triangles sont souvent faciles à percevoir par les élèves : une fois perçus, il reste à construire la démonstration permettant de conclure. »

Les manuels reproduisent cette tendance : un seul, Delagrave, aborde des problèmes concrets dans le chapitre consacré aux triangles semblables ; aucun manuel n'évoque la question de la proportionnalité ombre/hauteur et la méthode de mesure de hauteur qu'elle procure.

La Géométrie mise en place est donc une géométrie qui travaille dans un modèle de la réalité mais le problème de la modélisation est évacué ainsi que le retour sur l'espace réel. L'espace local proposé aux élèves est celui de la feuille de papier, les dessins sont les représentants d'objets géométriques définis par leurs propriétés et ce sont a priori sur ces objets que porte le travail. Toutefois les textes qui font régulièrement mention de la reconnaissance ou de la perception de triangles isométriques ou de même forme n'ignorent pas l'appui heuristique que constitue le dessin. Dans quelle mesure les élèves comprennent-ils le jeu subtil entre les deux géométries , il est clair que dans le cadre de cette étude nous ne pouvons que soulever la question ?

Notons pour terminer cette analyse du niveau de Seconde en référence à ce qui est développé au Chili, que le nombre d'or est présent dans quatre manuels.

Conclusion

La notion de triangles de même forme n'est pas mise en relation avec celle de représentation à l'échelle. La définition adoptée par tous les manuels (trois angles égaux) est celle qui est suggérée dans les textes, c'est une caractérisation minimale qui ne se préoccupe pas des relations de longueur. Mais le lien avec l'agrandissement-réduction et la proportionnalité est présent dans tous les cas. Un tiers des manuels seulement proposent des procédés de construction, la notion semble considérée comme allant de soi.

Enfin, un seul manuel présente des situations d'application de contexte non mathématique ; le nombre d'or apparaît mais dans moins de la moitié des cas.

Les critères de similitude pour les triangles sont démontrés à partir des cas d'isométries et du théorème de Thalès et de sa réciproque. Il faut par ailleurs signaler qu'un travail sur les aires conduit à ce niveau à une démonstration des théorèmes de Thalès et de Pythagore.

Première et Terminale S

En Première S, la rubrique « Géométrie » introduit les translations et homothéties du plan et de l'espace :

Contenus : translations et homothéties du plan et de l'espace ; définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle,...)

En Terminale S Spécialité, sont abordées les similitudes (comme transformation conservant les rapports de distances) et les similitudes directes. Il est recommandé dans les commentaires de faire le lien avec les triangles semblables et isométriques introduits en Seconde.

Les textes officiels ne parlent pas du rapport d'une similitude mais les Accompagnements associent d'emblée la définition donnée ci-dessus à l'existence d'un nombre k par lequel les distances sont multipliées. Toutefois les termes agrandissement-réduction n'apparaissent pas.

Ni les textes des programmes, ni les brochures d'accompagnement ne font un lien entre ces notions et celle de représentation à l'échelle. Aucun exemple proposé dans les brochures d'accompagnement n'a trait à une situation concrète ; les problèmes traités sont de nature théorique (étude de configurations, problèmes de lieu et de construction).

De plus, les textes (Instructions et Dacc) attribuent explicitement une finalité de niveau de conceptualisation supérieur à l'enseignement sur les similitudes :

> Avec l'étude des similitudes planes, on vise à la fois une synthèse des études antérieures sur les transformations et une première approche implicite de la structure de groupe " (Programme de Terminale S Enseignement de spécialité).
>
> Pourquoi l'étude des similitudes ?
>
> [...] Elle [une telle étude] permet ensuite de construire un ensemble théorique consistant : ; les élèves de spécialité pourront ainsi être confrontés à une expérience mathé-

matique fondamentale : celle de bâtir un " morceau " de l'édifice mathématique. Dacc, p.60

L'examen des manuels (Première S : Terracher et Déclic (Hachette), Transmath (Nathan), Fractales (Bordas) et Bréal -édition 2001- ; Terminale S : mêmes collections -édition 2002-) fait apparaître des attitudes variées :

En Première, le lien entre homothétie et agrandissement/réduction est fait ($\frac{4}{5}$) mais pas avec la notion d'échelle ($\frac{1}{5}$). Deux manuels étudient le fonctionnement du pantographe ; ce sont les seuls exercices ayant trait à une situation concrète dans les manuels examinés.

En Terminale, trois manuels n'utilisent à aucun moment les termes d'échelle ou d'agrandissement/réduction à propos des similitudes. Les deux autres évoquent ces notions en faisant référence aux fractales et à la notion d'autosimilarité. Mais un seul d'entre eux consacre un véritable développement à ces objets, mettant à contribution les élèves par quelques exercices ; des liens avec d'autres disciplines y sont évoqués.

Conclusion

Les deux classes scientifiques de Première et Terminale (Spécialité Mathématique) sont centrées sur le point de vue « Transformations » avec les notions d'homothétie et de similitude. Le lien est fait avec les triangles de même forme et la notion d'agrandissement-réduction. Par contre, la notion de représentation à l'échelle reste en marge du réseau conceptuel, seulement évoquée dans deux manuels de Terminale sur 5 avec la notion de fractales et d'autosimilarité. Ces chapitres ne donnent pas lieu à des applications non mathématiques, celles-ci étant présentes dans un seul manuel de Terminale. La finalité de cet enseignement est clairement interne aux mathématiques.

4.3.3 Synthèse

Au Chili, le réseau conceptuel centré sur les figures de même forme, abordé de manière limitée une première fois en 6B (agrandissement-réduction sur papier quadrillé, effet sur les aires) puis en 8B (triangles semblables, représentation à l'échelle) est présenté dans son intégralité en 2M. Il associe les notions et théorèmes suivants : représentation à l'échelle, agrandissement-réduction, triangles de même forme, homothéties, théorème de Thalès, critères de similitude, point de vue historique et artistique sur la question des proportions.

La notion de figures de même forme est motivée par la question de la production de représentations fidèles du monde réel : il s'agit de construire des représentations qui ne déforment pas la réalité et permettent en retour d'obtenir des informations inaccessibles dans la situation grandeur nature. Par ailleurs, la notion de figures de même forme n'est pas considérée comme allant de soi ou comme déjà disponible chez les élèves. Ces options se traduisent dans l'enseignement à deux niveaux :

- Des situations d'introduction multiples sont proposées ; la moitié d'entre elles posent la question de la non déformation et s'appuient sur les représentations du monde présentes dans l'environnement social, l'autre moitié conduit les élèves à réaliser eux-mêmes des figures de même forme par différents procédés permettant d'obtenir des agrandissements-réductions (pantographe, homothétie notamment).
- Les connaissances enseignées sont appliquées à des situations de détermination de grandeurs inaccessibles ; certaines passent par la réalisation d'une représentation à l'échelle et la réalisation de mesures sur le dessin qui est donc ainsi doté d'une véritable fonctionnalité.
- Les critères de similitude des triangles permettent d'étayer au niveau théorique plusieurs techniques de construction de représentations à l'échelle utilisant égalité des

angles et/ou proportionnalité des longueurs et valident la prise d'information sur la représentation.

Les documents d'accompagnement comme les manuels proposent une exploration expérimentale de l'un des deux résultats théoriques de ce réseau, théorème de Thalès (manuels) ou critères de similitude (Dacc), les activités proposées par les manuels étant plus directives que celles qui sont présentées dans les Dacc. Les textes officiels font référence à des démonstrations de ces deux résultats sans plus de précision. Le théorème de Thalès est démontré dans 2 des 4 livres examinés, dans les 2 autres, il est institutionnalisé sans remarque particulière relative au fait qu'il a seulement été vérifié expérimentalement. Quant aux critères de similitude pour les triangles, ils sont énoncés sans démonstration dans deux manuels, l'un est démontré dans deux autres. Outre les applications au monde réel déjà évoquées, ces résultats sont utilisés dans des exercices internes aux mathématiques.

Nous retiendrons enfin une attention réelle aux liens de ce réseau avec des questions artistiques, comme par exemple la place de la divine proportion dans les Arts.

Concernant la question du paradigme géométrique dans lequel s'inscrit le travail proposé, il semble que cette unité soit conçue par les auteurs des programmes comme une unité permettant la transition de l'espace de travail des élèves vers un type de Géométrie II avec mise en place de quelques règles de démonstration. Mais il reste envisageable de travailler dans le paradigme de la Géométrie I, si les connaissances acquises en Géométrie II ne permettent pas de traiter les problèmes issus de la vie réelle qui jouent un rôle central pour donner sens aux connaissances enseignées. Dans cette géométrie transitoire, les théorèmes remplissent deux fonctions : d'une part, ils jouent le rôle d'outils pour une géométrie du monde réel où ils dispensent de recourir sans arrêt à des mesures effectives ; d'autre part, dans les cas où la Géométrie II n'est pas encore efficace pour traiter complètement le problème concret posé, ils permettant éventuellement de justifier certaines techniques de Géométrie I. Il faut toutefois retenir qu'en l'absence d'un statut de « théorème admis », demeure une certaine ambiguïté à propos des résultats qui dans certains cas sont institutionnalisés après une simple vérification expérimentale.

En France, l'espace de travail dans lequel on souhaite que les élèves s'inscrivent est explicitement dès la Cinquième, de fait dès la Sixième, celui de la Géométrie II. Ce choix se traduit en particulier par une quasi-exclusion de toute activité supposant que les élèves aient à déterminer eux-mêmes des mesures inconnues, dans le monde réel comme sur les dessins géométriques. Tout résultat est démontré ou reçoit le statut particulier de théorème (provisoirement) admis.

Les différentes notions du réseau conceptuel sont présentées successivement : représentation à l'échelle en 5^e, théorème de Thalès en 4^e puis 3^e, effet de l'agrandissement réduction sur les aires et les volumes en 3^e, triangles de même forme en 2^e, homothéties en Première S. Enfin l'enseignement de Spécialité de Terminale S aborde la notion de similitudes.

Si les chapitres successifs voient (mais de manière inégale suivant les manuels) se réaliser une mise en relation des différents éléments, le réseau obtenu n'intègre pas la problématique de la représentation à l'échelle qui reste marginale et quasiment cantonnée à l'année de 5e. Dans la mesure où la conception des mathématiques exclut à partir du collège que dans le cadre du cours de mathématiques, l'on puisse obtenir des informations par réalisation de mesures sur un objet matériel, y compris un dessin, les représentations à l'échelle ne reçoivent aucune véritable fonctionnalité. Les tâches proposées aux élèves se réduisent à des calculs de proportionnalité ; l'exercice de cette notion apparaît comme la motivation principale de la présence des représentations à l'échelle dans le domaine des travaux numériques et non géométriques.

Par ailleurs, on constate qu'aucune technique de réalisation de représentation à l'échelle n'est enseignée, il s'agit là d'une pratique sociale avec laquelle les élèves sont supposés être déjà familiarisés. Le fait que différentes techniques existent nécessiterait pourtant une certaine institutionnalisation mathématique, sous forme de théorèmes admis, ce n'est pas fait. Ce qui s'explique par ou explique le fait que les élèves ne soient que marginalement confrontés au tracé de plan à l'échelle.

La notion de triangles de même forme n'est pas motivée par la problématique de non déformation du réel, rien ne vient justifier son introduction. En Seconde, aucun processus de familiarisation s'appuyant notamment sur la réalisation matérielle de dessins de même forme n'est proposé, cette notion semble aller de soi.

L'agrandissement-réduction est une problématique interne aux mathématiques, qui reste cantonnée avec l'homothétie puis la similitude aux limites des figures géométriques, représentées dans le cadre de la feuille de papier. Les applications se situent elles aussi dans le cadre strict de la géométrie (étude de configurations, problèmes de lieu et de construction). En Terminale S, les textes officiels situent au plan de l'expérience d'une synthèse théorique la finalité du chapitre sur les similitudes. Sauf exception, ces chapitres ne donnent pas lieu à la confrontation à des situations du monde réel. La dimension artistique de la question est un peu plus présente, en Seconde.

Sur le plan de la validation, si l'on excepte le cas des représentations à l'échelle non traité en géométrie, les théorèmes sont démontrés. Seul le théorème de Thalès est l'objet d'un traitement différent en 4^e : il est vérifié expérimentalement sur un nombre très limité de cas, démontré dans un cas particulier (rapport rationnel donné) puis prend le statut de théorème admis ; mais sa généralisation en 3^e est établie par démonstration et la classe de 2nde propose une démonstration par les aires.

Le thème des triangles de même forme apparaît comme une entrée particulièrement pertinente pour la comparaison des deux systèmes puisqu'y sont illustrées les principales différences entre deux systèmes mis en évidence par les différents outils utilisés dans notre étude.

Chapitre 5

Autour des conceptions de la géométrie de futurs enseignants

L'étude des programmes chiliens et français fait apparaître de grandes différences dans les enjeux de la géométrie enseignée. D'un côté, la géométrie est fortement reliée au monde de la pratique auquel elle est censée fournir des solutions et des techniques, de l'autre elle reste très proche d'une propédeutique du raisonnement rationnel. Cette opposition se traduit par une distance entre les deux paradigmes dominants : la Géométrie I au Chili, la Géométrie II en France.

Les deux études qui suivent se proposent de voir si cette différence perceptible dans les programmes et les manuels se confirme aussi dans l'épistémologie spontanée des futurs professeurs.

5.1 Quelle vision de la géométrie

5.1.1 La méthodologie

Dans cette partie, nous essayons de voir à partir d'un petit questionnaire si la différence d'approche du travail géométrique dans les deux pays se retrouve dans les conceptions de la géométrie chez les futurs enseignants.

Nous avons pour cela simplement demander à des groupes d'étudiants en formation de donner trois verbes et trois adjectifs évoquant la géométrie. Nous sommes conscients que ce type de questionnaire aboutit souvent à des résultats très relatifs mais il s'agit de voir ici si les données que nous obtenons confirment ou non les éléments apportés par nos autres analyses. Ce questionnaire ne doit pas être conçu comme un élément isolé de la recherche mais comme un point supplémentaire de notre investigation.

Voici la forme retenue pour ce questionnaire.

> **Vous avez reçu un enseignement de géométrie, vous aurez à enseigner la géométrie.**
>
> **Donner 3 adjectifs et 3 verbes qu'évoque pour vous la géométrie. Indiquer à chaque fois, en le soulignant, l'adjectif ou le verbe le plus important pour vous ? Expliquer pourquoi ?**

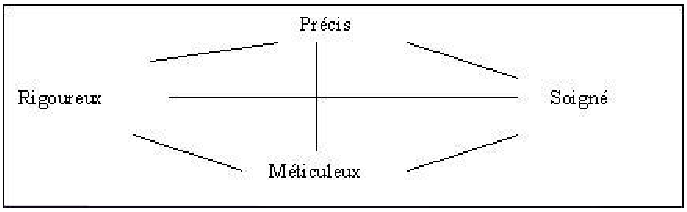
Une question supplémentaire a été posée en France pour distinguer les différents sens du mot *rigueur* qui apparaît régulièrement dans les différents types de discours tenus sur cette discipline. S'agit-il de la rigueur propre à la Géométrie II et qui porte davantage sur le raisonnement logique ? Ou bien parle-t-on de la rigueur des tracés des figures qui importe surtout en Géométrie I ?

Qu'appelleriez vous rigueur (un mot qui revient souvent) en géométrie ?

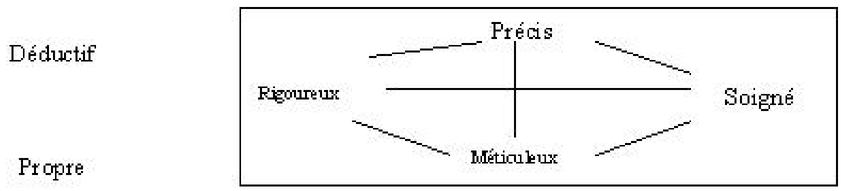
Ce questionnaire a été donné au Chili et en France à des groupes d'étudiants se destinant à devenir professeur soit dans le l'enseignement primaire soit dans l'enseignement secondaire. C'est ainsi que nous avons pu recueillir l'avis de quatre populations différentes :
- des étudiants professeurs d'écoles en première année d'IUFM ;
- des étudiants en faculté de pédagogie se destinant à devenir professeur à la basica. Dans les deux cas il s'agit d'étudiants polyvalents.
- des étudiants en mathématiques inscrit en première année d'IUFM pour devenir professeur de Lycée et Collège ;
- et enfin des étudiants de la faculté de mathématiques préparant le magistère de pédagogie mathématique nécessaire pour pouvoir devenir professeur de l'enseignement medio au Chili.

L'analyse de ce type de questionnaire pose toujours de nombreuses difficultés liées à l'interprétation plus ou moins approximative des relations entre les divers mots. Pour limiter les effets de ces interprétations nous nous sommes en partie appuyés sur la notion de champ sémantique.

Ainsi considérons le champ sémantique de *rigoureux*, ce terme est fréquent chez les étudiants français mais il recouvre des significations différentes. On peut déterminer la clique suivante[1] à l'intérieur de notre corpus à partir des cliques proposées dans le travail du Laboratoire de linguistique de l'Université de Caen[2].



Ce champ est rattaché aux mots *déductif* et *propre* par *rigoureux*, mais ici il ne s'agit plus d'un graphe complet car ces mots ne sont pas synonymes des trois autres mots. Ils ne sont pas non plus synonymes entre eux.



Si le premier mot *déductif* renvoie au raisonnement, le second *propre* évoque la présentation et les tracés. Dans ce cas, la question supplémentaire posée en France aux Professeurs d'Ecoles sur le sens du mot *rigueur* tente de déterminer à quel sens se réfère plutôt l'ensemble des mots de la clique précédente. S'agit-il de la rigueur propre à la Géométrie II et qui porte davantage sur le raisonnement logique et alors la relation s'oriente vers *déductif.*

[1] il s'agit d'un graphe fermé
[2] http ://elsap1.unicaen.fr

Ou bien, parle-t-on plutôt de la rigueur des tracés de figures qui importe surtout en Géométrie I et alors c'est la référence à la netteté et à la propreté qui apparaît et la relation s'oriente alors vers *propre*.

Dans notre corpus, apparaissent aussi des mots antonymes comme déductif et intuitif ou le couple concret-abstrait. Ces mots sont souvent regroupés par les étudiants par association d'idée et non parce qu'ils ont le même sens. Nous avons noté avec des segments pointés au lieu de flèches ces regroupements par opposition.

5.1.2 La classification

Á partir du corpus ainsi constitué, nous avons pu progressivement créer des classes regroupant les adjectifs. En nous basant sur la notion de travail géométrique, nous avons distingué les adjectifs qui caractérisent de manière interne le travail géométrique et ceux qui donnent un point de vue externe sur ce travail géométrique.

Une caractérisation interne de l'ETG

Sous cette dénomination, nous retenons quatre classes d'adjectifs. La première, le Pôle théorique logico-déductif, regroupe des adjectifs comme *logique, raisonnée, abstracta, théorique*. En opposition sémantique à ce pôle nous avons retenu un Pôle empirique avec la distinction intuitif/concret.

Certains termes sont très spécifiques de l'espace de travail géométrique comme *euclidienne, spatiale, dimensionnelle, parallèle*. Enfin, nous avons retenu une classe Exactitude avec des mots comme *rigoureux, précis, propre*. Celle-ci peut, suivant le sens attribué à ces mots, se rattacher à un point de vue interne ou marquer une transition vers un point de vue externe sur le travail géométrique.

Un point de vue externe sur le travail géométrique

Cette fois, grâce à ces adjectifs, les étudiants peuvent émettre des points de vue sur le rôle ou sur les conditions d'accès à la géométrie. Ainsi, avons nous introduit une classe associée à l'Accessibilité que nous divisons en *facile* et *difficile*. Cette classe caractérise la géométrie pour son utilisateur, elle peut être soit *aride, angoissante* ou à l'opposé *amusante, divertissante*.

Une classe, particulièrement riche au Chili, se rapporte à l'utilité de la géométrie *utile, efficace, pratique*. Dans cette lignée il y a aussi les adjectifs qui insistent sur la nécessité et d'autres sur les aspects culturels et esthétiques.

En résumé voici toutes les classes que nous avons retenues retenues :

Le point de vue interne

PLD Pôle logique et déductif

PEm Pôle empirique

Exac Exactitude

ETG Les objets de l'ETG

Le point de vue externe

Util L'utilité

A+,A- L'accessibilité avec l'opposition entre le facile et le difficile

Nec La nécessité

Cult Les aspects culturels et esthétiques.

Le tableau des résultats que nous avons obtenu avec cette classification est le suivant :

	Etudiants	PLD	ETG	Exactitud	Empirique	Utilité	Difficile	Facile	Necessité	Culturel	Mots
PE1	30	13	15	24	11	4	10	5	2	4	88
Basicos	26	5	3	8	5	8	7	19	9	0	64
PLC1	37	6	12	19	24	2	18	18	1	4	104
Medio C	28	6	6	2	7	19	8	23	4	14	89

Fig. 5.1 – Tableau des résultats

Une étude du Chi2 sur ces données fait apparaître que les populations françaises et chiliennes sont indépendantes à un seuil très élevé. Les deux groupes français sont également indépendants (seuil .97) par contre l'on ne peut pas considérer les deux populations chiliennes comme indépendantes.

Les diverses relations possibles entre les classes sont visualisées sur le diagramme suivant.

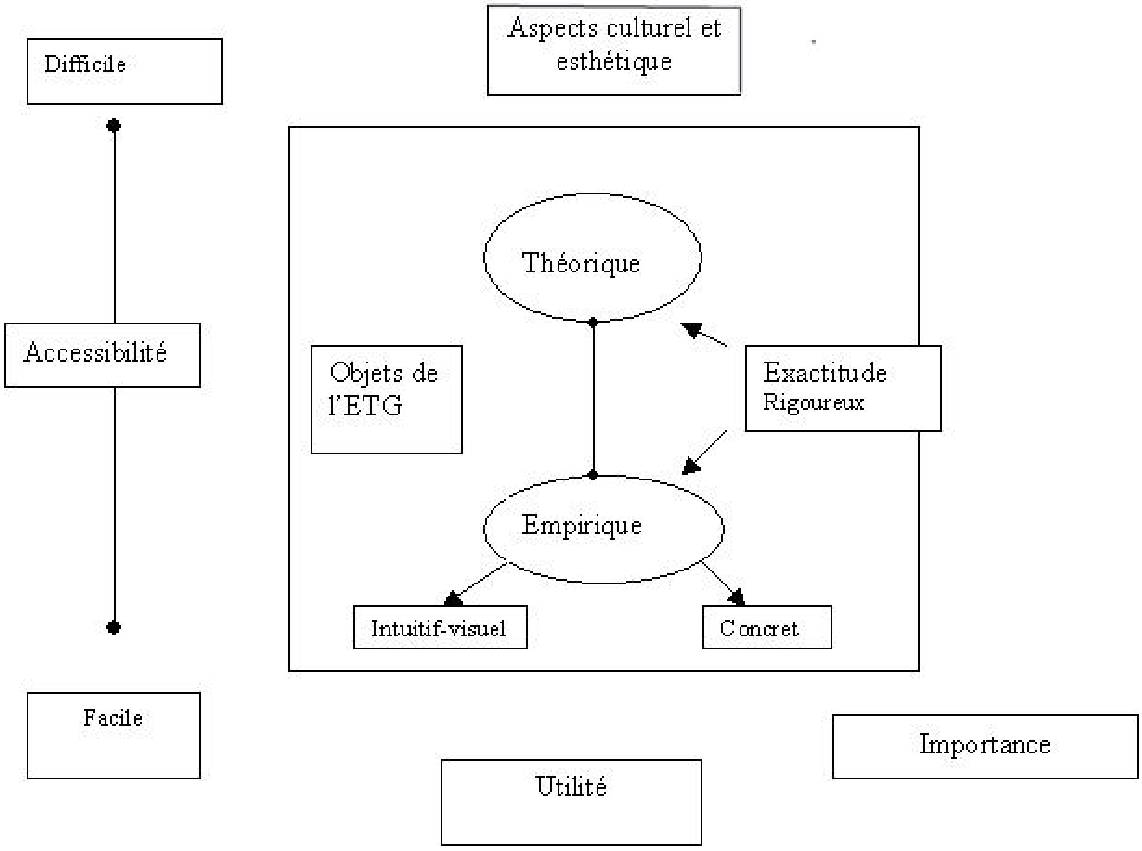


Fig. 5.2 – Organisation globale

5.1.3 Présentation détaillée des résultats par catégorie d'étudiants

Les étudiants professeurs chiliens pour l'enseignement medio

Les trois classes d'adjectifs les plus représentées concernent toutes des points de vue sur la géométrie qui est massivement jugée utile, facile et riche culturellement et esthétiquement. Ces trois classes représentent près des deux tiers des réponses. Ces réponses sont en parfaite conformité avec notre attente et les résultats des différentes analyses curriculaires qui ont montré la place spécifique de la Géométrie I articulée avec des applications à la vie quotidienne dans l'enseignement medio.

Une caractéristique propre aux étudiants en mathématiques chiliens est l'importance qu'ils accordent aux termes évoquant l'aspect esthétique et culturel de la géométrie.

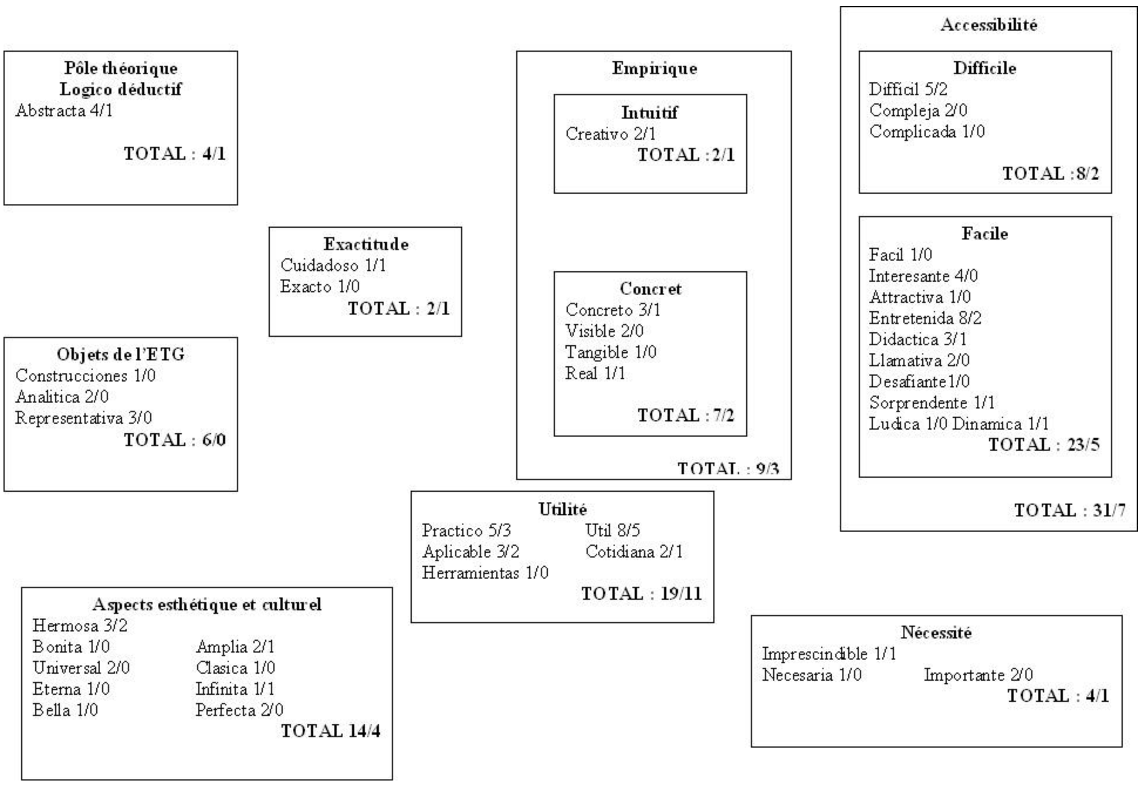
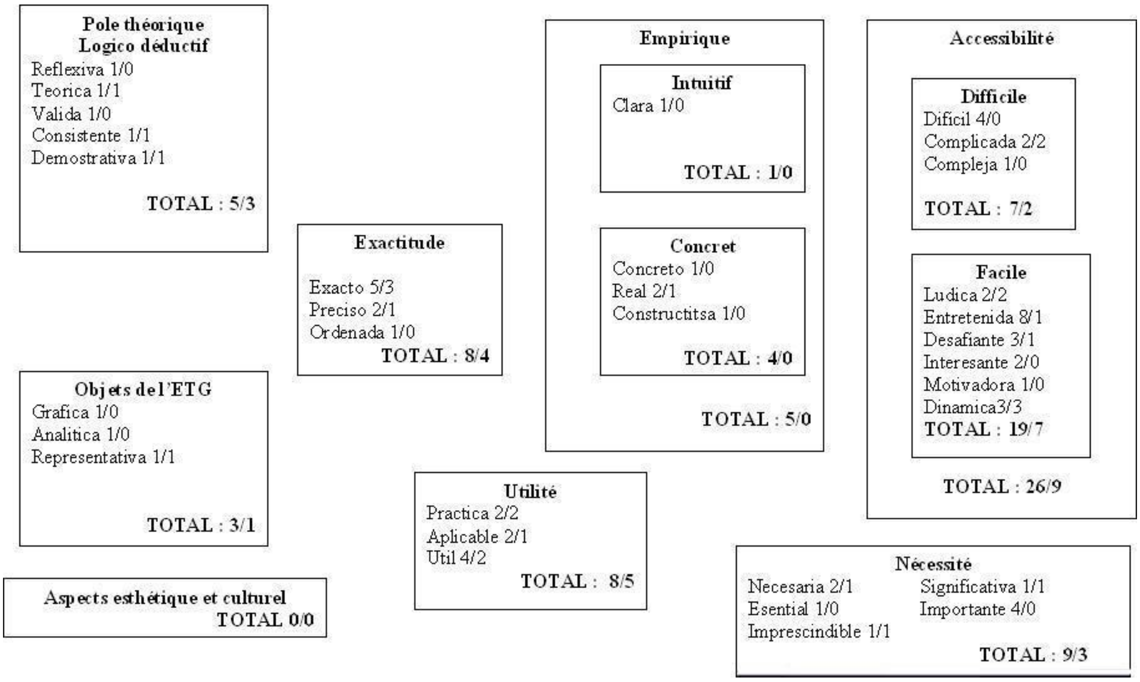


Fig. 5.3 – Etudiants chiliens de l'enseignement secondaire

Dans ce tableau, comme dans les suivants, pour chaque adjectif est donné un couple de nombres : le premier terme précise le nombre d'occurences de cet adjectif, le second le nombre de fois où cet adjectif a été souligné comme le plus important.

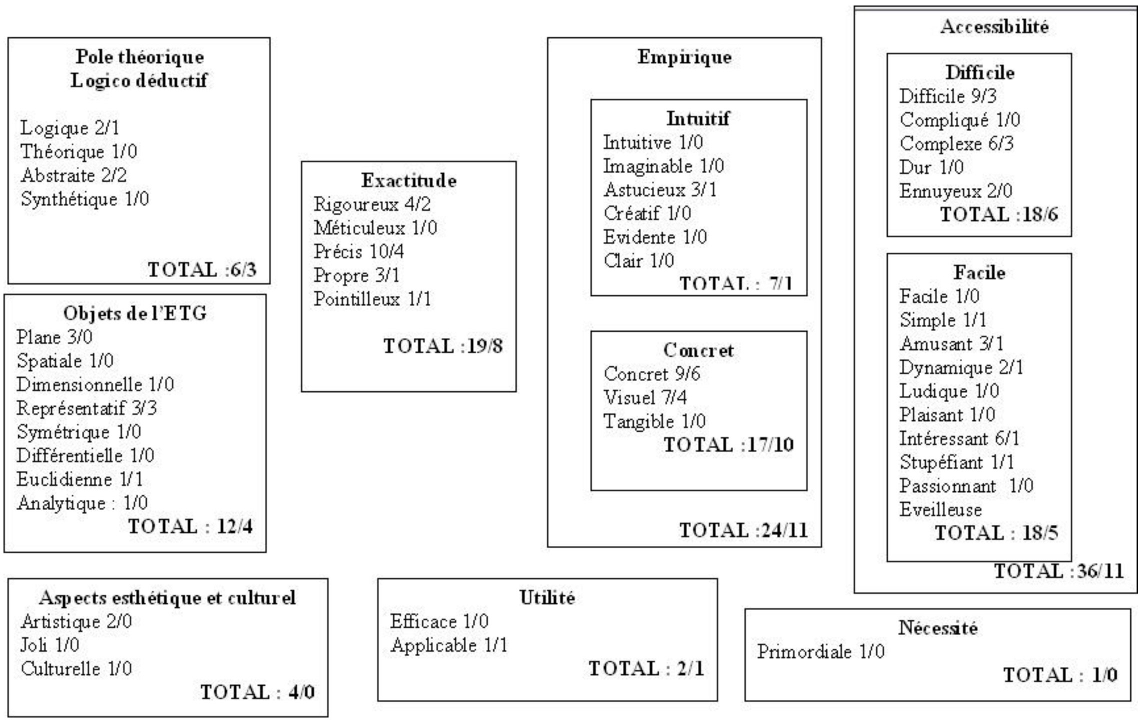
Les étudiants professeurs chiliens pour l'enseignement de la basica

Cette fois la classe la plus représentée est celle qui fait allusion au caractère facile et accessible de la Géométrie. Si l'on ajoute ensuite les adjectifs soulignant la nécessité et l'utilité de la géométrie, on obtient là encore un point de vue externe sur la géométrie qui renvoie à son rôle social et aussi à sa place dans l'école élémentaire.



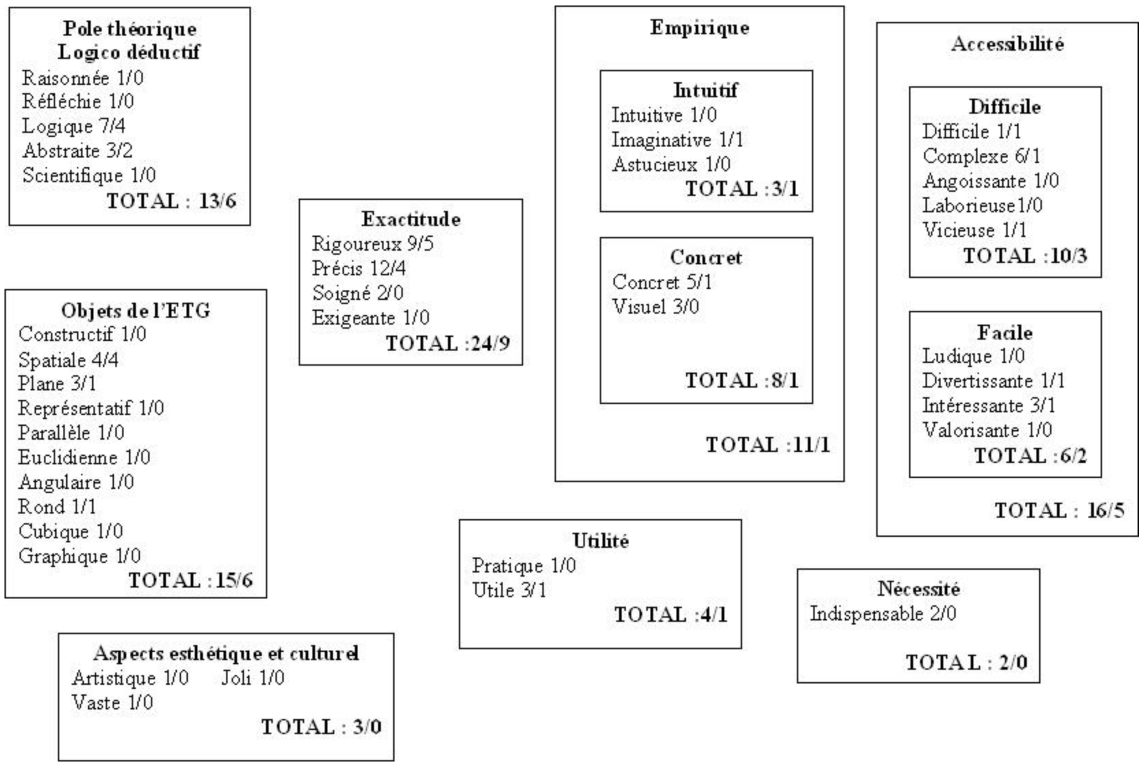
Les étudiants professeurs français pour l'enseignement secondaire

Il s'agit ici d'étudiants préparant le Capes de mathématiques. Les trois classes les plus présentes sont d'une part l'accessibilité avec une égale répartition entre facilité et difficulté. Et d'autre part, le pôle empirique associé à l'exactitude des tracés et/ou des raisonnements. Il y a donc à la fois une centration sur le travail géométrique vu comme intuitif et concret par opposition sans doute à l'analyse ou à l'algèbre et aussi une grande sensibilité au caractère à la fois facile et difficile de cette discipline : facile quand il s'agit de percevoir les objets, difficile quand il faut bâtir des raisonnements.



Les étudiants professeurs français pour l'enseignement élémentaire

Chez ces étudiants, les trois classes les plus présentes renvoient à l'exactitude, aux termes spécifiques de la géométrie et aussi au pôle démonstratif et théorique. Il faut sans doute voir là l'effet de la préparation à un concours : en effet, ces étudiants non spécialistes en mathématiques doivent faire un important effort pour travailler ce domaine qu'il maîtrisent généralement assez mal. Il n'ont donc que très peu de distance avec l'ETG.



5.1.4 Comparaison entre les catégories d'étudiants

Parmi les caractéristiques opposant les étudiants chiliens (Basica et Math Chili) aux étudiants français (PE et PLC), nous avons particulièrement remarqué :

- chez les étudiants chiliens (Basica ou Math), en contraste avec les étudiants français, il apparaît une décentration importante par rapport à la géométrie.
  Il est possible de donner plusieurs interprétations à ce phénomène, la première a été rappelée et tient à la différence entre les paradigmes dominants en France et au Chili. Cette sensibilité à la forme enseignée de la géométrie peut aussi s'expliquer par le fait que les étudiants chiliens suivent un cursus qui les sensibilise dès la première année après l'équivalent du Bac à de des préoccupations éducatives. Ce n'est pas encore le cas pour les PE1 et PLC1 français qui à ce moment de leur formation (après la licence) n'ont qu'exceptionnellement reçu une sensibilisation à l'enseignement (modules de pré-professionalisation pour PLC et PE et Licence de Sciences de l'Education pou PE).
- De nombreux adjectifs qualifient la géométrie comme *utile* voire nécessaire chez les étudiants chiliens. De plus ils ont souvent qualifié cet adjectif comme le plus important parmi les trois qu'ils donnaient.

En revanche, ce type d'adjectifs évoquant l'utilité de la géométrie est quasiment absent du corpus donné obtenu à partir des réponses des étudiants français. Il y a là, certainement, un effet de la différence d'approche de l'enseignement de la géométrie dans les deux systèmes.

- Les étudiants français (PLC et PE) utilisent de nombreux adjectifs qui évoquent l'exactitude et la rigueur. De plus un nombre important d'étudiants considère cet aspect comme primordial. Ce point est nettement moins présent chez les étudiants chiliens
- Les étudiants polyvalents en France et au Chili se distinguent très nettement par le fait que les étudiants français proposent de nombreux adjectifs évoquant les contenus et caractéristiques de la géométrie(objets de l'ETG, aspect théorique, démarches empiriques) alors que les étudiants de la Basica au Chili n'en proposent pratiquement pas. Cela peut provenir de la nature de leurs études universitaires centrées principalement sur les sciences de l'éducation avec très peu d'enseignement des mathématique souvent présentées dans des options.

A côté de tous ces éléments de différenciation, il faut noter une caractéristique commune aux quatre groupes, il s'agit des nombreuses évocations de l'accessibilité de la géométrie. Mais l'analyse des différences précédentes montre que l'évocation de ces termes communs n'est pas faite dans le même sens. Il semble (mais il faudrait approfondir l'étude) que pour certains il s'agit plutôt de l'évocation de leur propre vécu par rapport à la géométrie ou de réflexions liées à une perspective pédagogique alors que pour d'autres cette évocation renvoie plus à la nature même de l'objet étudié.

5.2 Étude de l'espace de travail géométrique personnel

Dans la section précédente, nous avons commencé l'étude de la composante personnelle de l'espace de travail géométrique. A l'occasion de notre travail dans le groupe ECOS, nous avons aussi approché cette dimension personnelle à partir de la résolution de problèmes de géométrie formulés de manière identique dans les deux pays. Cette étude n'a pu être que partiellement menée à son terme aussi nous ne donnons dans ce chapitre que la description du travail effectué autour de la situation « Charlotte et Marie ». Les travaux menés sur les mesures inaccessibles ne figurent pas dans cet ouvrage [3]

5.2.1 Etude d'un exercice posé aux étudiants chiliens et français

Pour étudier, à la fois, les paradigmes privilégiés par les étudiants dans leur approche de la géométrie et leur espace de travail personnel, nous avons proposé un exercice extrait d'un dispositif de formation relativement complexe développé en France par Kuzniak et Rauscher (2002 et 2003).

L'exercice clef « Charlotte et Marie »

L'exercice suivant (Hachette Cinq sur Cinq 4ème 1998, page 164) entre dans la catégorie des exercices de géométrie où se pose clairement la question de l'existence d'un espace de travail idoine pour résoudre le problème.

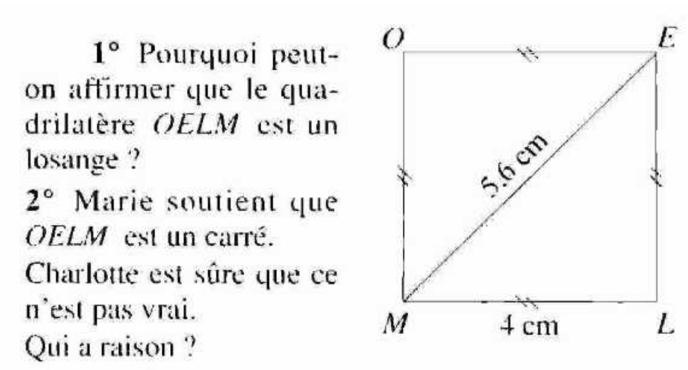


Fig. 5.4 – Le problème Charlotte et Marie

Le dessin proposé à l'étude ressemble à un carré mais son statut dans le problème n'est pas clair. Il possède certaines particularités d'un dessin coté : les côtés du quadrilatère sont codés et indiquent leur égalité, des mesures figurent sur le dessin. Mais quelle est l'origine de ces mesures ? S'agit-il de mesures effectuées sur une figure préexistante ou sont-elles, notamment pour la diagonale, le fruit d'un calcul. La longueur de la diagonale $[ME]$ est donnée au dixième de cm près (5,6 cm), ce qui peut incliner à penser qu'il s'agit d'une mesure réelle. Mais, comme d'autre part le problème est issu d'un livre de fin de collège, on peut penser à une mesure théorique plus conforme au contrat didactique usuel dans ce type de classe.

[3]Voir cependant p 143

Ainsi, le dessin est-il une donnée première, un objet réel, que le problème se propose d'étudier ou résulte-t-il d'une construction à partir d'un cahier des charges précisé dans un texte. Dans ce cas la réalisation pratique est-elle importante ou n'est-elle qu'un support pour aider le raisonnement ?

En général, le texte du problème doit permettre de répondre à ces questions et de déterminer le statut de l'objet figuré. Mais, ici, l'énoncé ne donne aucune indication sur ce point car comme le signale un étudiant : *il n'y a pas de textes pour l'énoncé, il n'y a qu'un dessin qui peut tromper.* Seul semble acquis le fait que le quadrilatère soit un losange, savoir s'il s'agit d'un carré ou non est laissé à la charge de l'élève.

Finalement, est-ce Charlotte ou Marie qui a raison ? Une façon classique de résoudre ce type d'exercice consiste à utiliser le théorème de Pythagore qui évite le recours à une mesure effective de l'angle. Mais là encore, comme nous allons le voir resurgit l'ambiguïté sur le choix de l'espace de travail. Pour cela, nous introduisons deux formes du théorème de Pythagore, une forme abstraite classique portant sur des nombres réels et sur des égalités

Si le triangle ABC est rectangle alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$

et une forme concrète pratique qui utilise des nombres approchés et, de façon moins courante, des figures approchées

Si le triangle ABC est « à peu-près » rectangle alors $AB^2 + BC^2 \simeq AC^2$

La première forme permet de basculer simplement dans une Géométrie qui s'écarte des données de l'expérience en raisonnant ici de manière élémentaire dans le cadre numérique. Quant à la seconde formulation, elle apparaît plutôt comme une forme avancée de Géométrie I.

Si l'on se place en Géométrie II, en utilisant la forme abstraite du théorème de Pythagore, alors on peut raisonner comme le propose un étudiant et donner raison à Charlotte :

> On sait que si OEM est rectangle en O alors on a $OE^2 + OM^2 = ME^2$
>
> On vérifie $4^2 + 4^2 = 5,6^2$ et $32 \simeq 31,26$. Donc OEM n'est pas un triangle rectangle.

Si on utilise le théorème de Pythagore approché dans un cadre mesuré alors on suivra plutôt le raisonnement proposé par un autre étudiant :

> C'est un carré si un angle au moins est droit entre deux côtés.
>
> L'angle MLE est droit si et seulement si :
>
> $ML^2 + LE^2 = ME^2$ d'après le théorème de Pythagore
>
> $16 + 16 = 32$ or $32 \simeq 5,6$
>
> Marie a raison $OELM$ est un carré.

En fait, il faudrait conclure qu'$OELM$ est « presque » un carré mais comme on le sait, faute d'un langage adapté, il n'est pas possible aux élèves et aux étudiants de jouer sur ces différentes distinctions. Ils vont être ainsi confrontés à un malentendu à la fois épistémologique et didactique qui nous permet d'analyser dans leurs productions écrites le jeu entre la Géométrie I et la Géométrie II.

Nous avons pu dégager quatre populations[4] dans notre étude des réponses données par des étudiants professeurs d'école français.

[4] Voir Kuzniak (2006) ou Kuzniak-Rauscher (2005)

PII Une première population (PII) est composée des étudiants qui ont utilisé la forme classique du théorème de Pythagore. Celui-ci est appliqué à l'intérieur du monde des figures abstraites sans considérer l'apparence réelle de l'objet. Seules comptent les informations données par l'énoncé et les codages (code de segments, indications sur la dimension des longueurs). Pour prouver que le quadrilatère est un losange (quatre côtés de la même longueur) et montrer que ce n'est pas un carré (contraposée du théorème de Pythagore), les étudiants utilisent des propriétés minimales et suffisantes. Nous considérerons cette population comme raisonnant au sein de la Géométrie II.

PIprop Une autre population regroupe les étudiants qui appliquent le théorème de Pythagore approché, en fait sa réciproque pour conclure que Marie a raison. Dans ce cas, les étudiants reconnaissent l'importance du dessin et de l'approximation des mesures. Le théorème de Pythagore pratique apparaît comme un outil de Géométrie I. Nous désignons cette population par PIprop pour insister sur le fait que les individus de ce groupe utilisent des propriétés pour argumenter.

Deux autres groupes concluent sans référence au théorème de Pythagore.

PIexp Nous regroupons ici les étudiants qui utilisent la mesure et les outils de dessin pour parvenir à une réponse. Ils se sont placés dans le monde expérimental de la Géométrie I.

Généralement, ce type d'étudiants conclut que Marie a raison. Mais, ce n'est pas toujours le cas : un étudiant, utilisant son compas, vérifie que les sommets du quadrilatère ne sont pas cocycliques et conclut qu'$OELM$ n'est pas un carré.

PIperc Dans cette dernière catégorie, nous plaçons les étudiants dont les réponses ne paraissent basées que sur la perception : leur interprétation du dessin fonde la réponse et ils ne donnent pas d'information sur leurs moyens de preuve.

Cette catégorie d'étudiants nécessite une analyse complémentaire pour déterminer la nature du travail géométrique effectivement entrepris. Il n'est notamment pas évident de savoir s'il s'agit d'une réponse par défaut et oubli des propriétés ou alors d'une réponse clairement basée sur la seule vision de la figure.

5.2.2 L'analyse statistique

Nous avons utilisé deux méthodes statistiques pour traiter nos données, une analyse factorielle et une analyse implicative.

Pour effectuer ces diverses analyses statistiques nous avons retenu les productions de deux groupes d'étudiants français soit 57 personnes se destinant à devenir Professeur d'école. Nous n'avons pas retenu pour cette étude statistique, les étudiants PLC qui se sont révélés être assez homogènes ; ils ont tous sauf un répondu Charlotte et ceci de manière assez stéréotypée. Du côté chilien notre analyse n'a retenu qu'un groupe d'étudiants en mathématiques. Nous expliquerons plus loin l'absence de productions d'étudiants pour enseigner en basica qui a contrario ont pratiquement tous répondu Marie avec un minimum de justification. (Voir le paragraphe 5.2.3).

L'approche factorielle

La première approche statistique repose sur les outils de l'analyse en composantes principales. Le principe consiste à étudier, grâce à un codage, les réponses fournies par les étudiants aux trois questions posées dans le cadre du problème Charlotte et Marie.

Ce codage prend en compte huit aspects qui apparaissent dans les diverses réponses des étudiants.

Pour la première question qui demande de prouver que le quadrilatères est un losange, l'aspect 1 s'intéresse aux sources d'information utilisées par l'étudiant, prend-il ou non des informations sur la figure. L'aspect 2 examine les justifications données pour prouver que la figure est un losange : accumulation d'arguments, usage d'une propriété caractéristique.

Pour étudier la question 2 qui demande de savoir qui de Charlotte ou Marie a raison, nous avons retenu la réponse donnée par l'étudiant à la question (aspect 3) : Charlotte ou Marie. Notons qu'en France parmi des étudiants non spécialistes en mathématiques, 20 étudiants ont répondu Charlotte, 28 Marie, 7 les deux et enfin deux étudiants ont affirmé qu'on ne pouvait pas savoir. Au Chili, sur les 31 étudiants effectuant des études de mathématiques dans la filière enseignement, 20 répondent Charlotte, 7 Marie, 1 les deux et enfin trois disent qu'on ne peut pas savoir. Pour le traitement statistique de cette aspect, nous utilisons deux variables binaire CHA et MAR. La première prend la valeur 1 quand un étudiant a répondu Charlotte, de même pour MAR quand la réponse est Marie. Nous pouvons ainsi prendre en compte la réponse « les deux » qui donne la valeur 1 à la fois à CHA et MAR.

L'aspect 4 recense les arguments donnés : références à un théorème, usage et type de calculs, remarques sur les angles ou les côtés, correction et cohérence du raisonnement utilisé.

L'usage éventuel des cas d'isométries des triangles est pris en compte dans l'aspect 5 (il s'agit d'une demande des collègues chiliens, cet usage n'apparaît jamais en France, il est apparu très rarement au Chili et ne figure pas dans l'échantillon que nous avons retenu). L'aspect 6 précise si les étudiants ont signalé une relation entre les losanges et les carrés pour étayer leur argumentation.

L'aspect 7 s'intéresse aux tracés ajoutés par les étudiants sur le dessin. Nous le codons par la variable FIG qui prend la valeur un dès qu'une marque ou un trait sont fait sur le dessin.

Enfin la troisième et dernière question, qui portait sur les doutes et difficultés exprimés par les étudiants, est prise en compte dans l'aspect 8. Cet aspect est décliné en trois parties : propriétés, dessin et approximation.

Pour être soumis à l'analyse statistique, ces divers aspects sont ensuite traités sous la forme de réponses disjonctives (oui/non) ce qui donne 14 caractères. Nous n'avons retenu dans cette analyse ni l'aspect 5 ni l'aspect 4c.

De l'étude effectuée avec le logiciel Statistica, nous donnons ici la représentation des variables dans le premier plan factoriel.

Le fait que les deux populations étudiées soit différentes apparaît nettement et nécessite une analyse séparée. Dans les deux cas, les deux variables les plus marquantes sont celles qui expriment la réponse Charlotte (CHA) ou Marie (MAR).

L'intérêt de l'étude statistique est de corréler ces variables avec d'autres qui nous ont semblé importantes comme l'usage des racines carrées (RAC) ou l'usage de la figure comme support de dessins (FIG). Dans le cas chilien, ces deux variables sont liées et l'opposition due à l'usage ou non de la racine carrée (SRAC) est également une variable déterminante. Il faut ici voir qu'elles permettent de différencier une population qui a opté majoritairement pour Carolina (La Charlotte de la version chilienne).

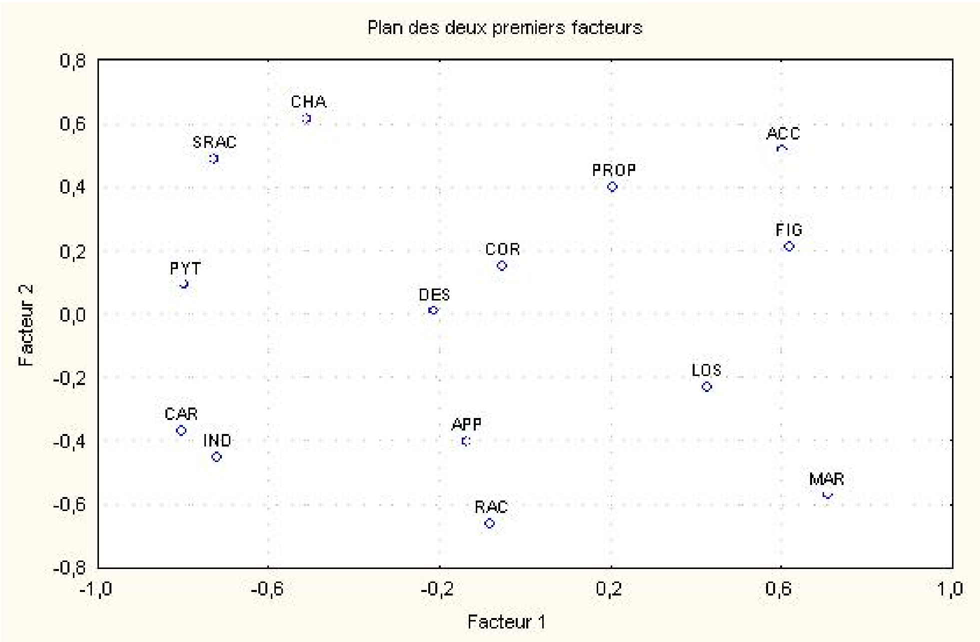


Fig. 5.5 – Représentation des réponses des étudiants PE français

Et voici cette même représentation pour les étudiants chiliens souhaitant enseigner en Lycée.

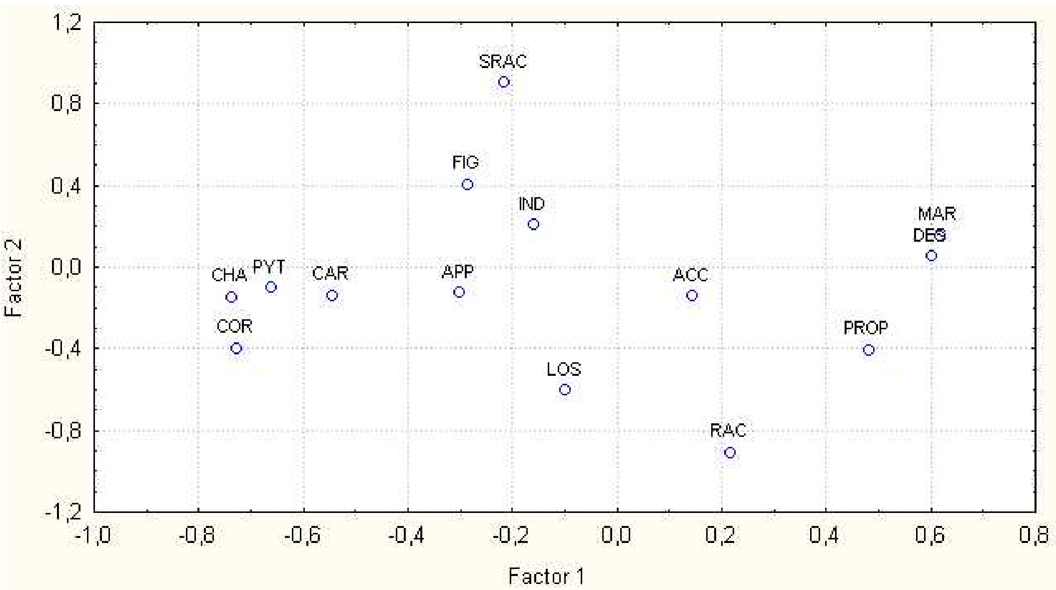


Fig. 5.6 – Représentation des réponses des étudiants chiliens

D'autre part, dans l'approche du raisonnement les deux variables importantes sont celles qui insistent sur l'usage de propriétés caractéristiques dans la première question (CAR) ou non (ACC).

Le graphe fait également apparaître le positionnement des trois variables liées aux doutes exprimés par les étudiants : DES pour dessin, APP pour l'approximation et enfin PROP pour l'expression de problèmes liés aux propriétés. La variable LOS qui précise l'apparition dans le raisonnement des étudiants de la relation entre losange et carré va également être intéressante à étudier.

L'approche implicative

L'analyse factorielle permet d'esquisser une première carte qui permet de placer les étudiants dans le premier plan factoriel. Mais pour regrouper les variables déterminantes avec plus de sûreté, nous avons utilisé le logiciel CHIC de façon à obtenir à la fois les arbres de similarités classiques entre variables mais aussi l'arbre cohésitif qui indique des relations orientées entre les différentes variables. Cette approche devient essentielle dans cette phase de l'étude qui cherche à comprendre la structuration de la pensée géométrique des étudiants de façon à décrire de manière plus dynamique les ETG mis en jeu.

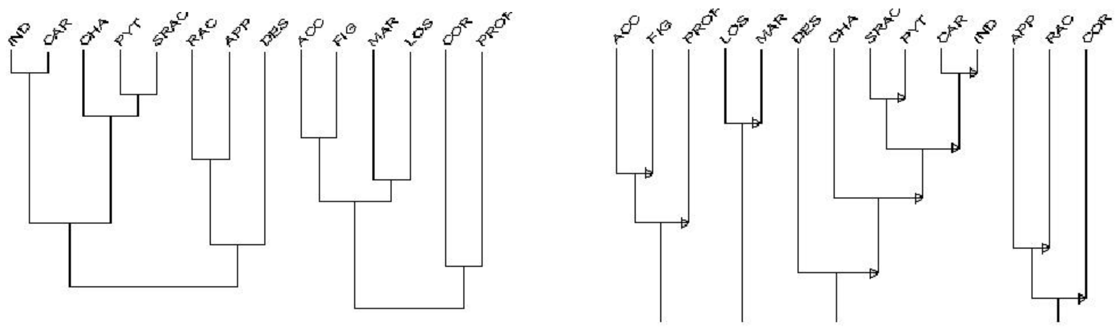


FIG. 5.7 – Arbres de similarité et cohésitif en France

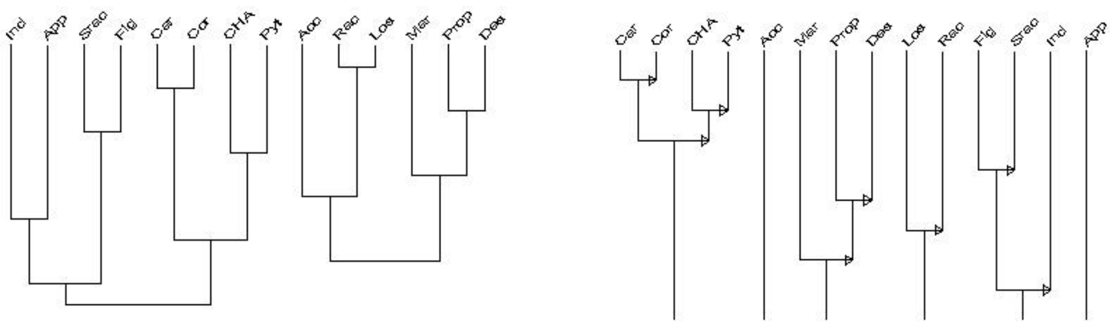


FIG. 5.8 – Arbres de similarité et cohésitif au Chili

L'étude implicative fait clairement apparaître en France quatre regroupements a priori intéressants et qui vont s'articuler sur la classification que nous avons présenté dans la section précédente. Un premier ensemble permet de grouper les variables [CHA, SRAC, PYT, CAR, IND]. Il renforce la compréhension des réponses des étudiants qui privilégient Charlotte (CHA) en organisant le raisonnement autour du théorème de Pythagore (PYT) avec un calcul sans racines carrées. Ces étudiants paraissent maîtriser la notion de propriété caractéristique (CAR) et n'utiliser que des informations fournies par l'énoncé (IND). Ce groupe est très proche de celui que nous avons identifié sous le nom de PII.

Un autre groupe s'organise autour des variables [LOS, MAR]. L'analyse implicative confirme la relation privilégiée qui existe chez les étudiants ayant insisté sur les relations entre le losange et le carré avec la réponse Marie, Ce groupe est proche de celui que décrivent les variables [ACC, PROP, FIG], mais il s'en différencie car les étudiants de ce groupe s'appuient sur la figure mais en énonçant une série de propriétés sur lesquelles dans le même temps ils indiquent leurs doutes et leurs difficultés. L'ensemble des réponses révèlent chez les étudiants une gestion du raisonnement géométrique différente de celle du premier groupe (PII) : appui visuel ou expérimental sur la figure, accumulation d'arguments ou raisonnement global basé sur la forme de la figure.

Enfin, de manière spécifique, l'analyse statistique montre la cohérence d'un dernier groupe autour de [APP, RAC, COR]. Ces réponses s'appuient sur le théorème de Pythagore « approché ». Les étudiants semblent sensibles à la nature de l'approximation et aussi à la question du dessin et de sa relation avec le problème. Leur manière de raisonner est proche du groupe PII mais leur sensibilité au réel est différente.

Du côté chilien, si quatre classes apparaissent encore, les regroupements sont différents, cela s'explique par le fait que Charlotte a été majoritairement choisie et l'analyse fait apparaître des différences dans cette population a priori homogène. Elle permet d'approfondir les différences dans une population proche de PII mais où nous pouvons discerner deux groupes. Nous avons un premier regroupement autour de [CAR, COR, CHA, PYT] organisé autour de l'usage des propriétés et théorèmes. Le second s'articule autour de [IND, APP, FIG, SRAC] et se montre plus sensible que le précédent à la relation entre la figure et le monde réel. Les étudiants de ce groupe ont choisi Carolina conformément à leur calcul mais celui-ci ne les satisfait guère car il est trop contradictoire avec ce qu'ils voient. Le jeu (GI-GII) est ici en place et on peut parler d'une GII non aveugle contrairement à ce qui se montre dans le groupe français plus homogène.

Le autre groupe [MAR, PROP, DES] a privilégié Marie, et ses membres évoquent le problème de ce dessin qui ressemble à un carré et ils font aussi allusion à des difficultés sur l'usage des propriétés. Le dernier groupement [LOS, RAC, ACC] semble *a priori* assez curieux mais il semble réunir les étudiants ayant un ETG personnel assez peu performant avec un raisonnement déductif peu sûr.

Une interprétation en terme d'ETG personnels

Pour aller plus loin, nous interprétons ces résultats en termes d'espace de travail de la géométrie et nous observons plus particulièrement le jeu (GI/GII).

Une première population travaille dans un ETG qui repose sur le référentiel théorique de la Géométrie II. Cette population se sépare en deux groupes : un premier maîtrise suffisamment, au moins dans l'exercice en question le référentiel théorique et ses règles de fonctionnement notamment argumentative. Le second groupe se place toujours en Géométrie II mais avec une maîtrise insuffisante qui est due soit à l'oubli de certaines propriétés, soit à une compréhension superficielle des règles de la Géométrie II. N'oublions pas que les étudiants ont nécessairement rencontré ce paradigme dans l'enseignement français et savent qu'il est dominant.

Dans les limites de l'étude, on peut noter une différence assez nette dans l'emploi de GII chez les étudiants français et chiliens qui maîtrisent ce paradigme. Chez les français, et cela est encore plus net chez les PLCl que nous avons interrogé sans procéder à l'analyse factorielle et implicative, GII est utilisé dans tout sa pureté sans relation avec avec le monde réel.

Lorsque le dessin est évoqué c'est surtout son aspect trompeur qui est souligné comme le veut l'usage didactique français à partir des classes de collège, moment où la Géométrie II se met en place dans le curriculum en rupture avec la Géométrie I. Par contre chez les étudiants chiliens, pourtant spécialistes de mathématiques, le regard de GII ne paraît pas aveugle et tente d'articuler perception et raisonnement.

L'autre grande population que pointe notre analyse est celle dont l'ETG repose sur l'horizon de la Géométrie I, le travail s'effectue sur un objet réel particulier qu'il s'agit d'étudier.

Cette fois encore, nous pouvons repérer deux sous-groupes, un premier semble se situer dans le jeu (GI GII). Mais cette fois, ce jeu GI/GII est bien différent du précédent et se rencontre chez des étudiants français chez : il s'agit alors plutôt d'un travail en Géométrie I éclairé par des utilisations de propriétés issues de GII. Ces étudiants semblent osciller entre GI et GII mais les règles usuelles du contrat didactique leur laissent peu de possibilités de s'exprimer clairement dans ce domaine.

Enfin, une partie importante des étudiants français travaillent dans GI en privilégiant l'entrée instrumentale ou perceptive. Rappelons qu'il s'agit d'étudiants non spécialistes en mathématiques et se destinant à devenir enseignant dans l'enseignement primaire. En toute logique nous devrions les comparer avec leur équivalent chilien, mais le même problème posé à ces étudiants s'est révélé inexploitable dans notre cadre. En effet, ces étudiants ont jugé que la réponse était évidente et qu'il s'agissait de Marie. Il se sont donc résolument placés dans un Géométerie I et ils ont répondu à nos questions d'une manière très brève en ne donnant souvent que la réponse sans aucun autre commentaire. Dans un premier temps, nous avons interprété cela comme un signe d'un ETG personnel particulièrement pauvre, nous allons voir dans le paragraphe suivant que c'est aussi le reflet de façons radicalement différentes de travailler dans les deux pays.

5.2.3 Question de styles

Pour comparer et analyser les copies des étudiants chiliens, nous avons rencontré une difficulté inattendue qui après analyse semble due au niveau mathématique très faible de étudiants non spécialistes en mathématiques mais qui provient aussi d'une différence radicale dans le rapport à l'oral et dans la façon de gérer l'écrit. Ceci nous a conduit à parler de styles différents ou pour utiliser la terminologie introduite dans TIMSS à pointer des « characteristic pedagogical flow » propres à chaque pays.

Pour qui a eu l'occasion d'observer des classes dans un autre pays que le sien, l'existence d'un style particulier propre à chaque système d'enseignement paraît évidente au-delà des variations individuelles. Cette constatation s'est imposée avec force aux auteurs de la sous-étude TIMSS sur les pratiques dans six pays différents (Cogan et Schmidt 1998). Mais évidemment la difficulté est d'étayer sur des bases solides ce que l'intuition donne comme évident. Dans l'étude TIMSS, les auteurs introduisent la notion de « characteristic pedagogical flow » pour rendre compte des formes récurrentes et typiques qu'ils ont pu observer. Une façon d'interpréter leur travail consiste à dire qu'ils tentent d'observer la nature des contrats pédagogiques mis en œuvre dans chaque système et d'en faire ressortir les spécificités. Ils sont ainsi conduits à observer plus particulièrement la gestion de certaines phases d'une séance d'enseignement.

Dans l'approche de la diversité mais comme nous l'avons vu, il importe de déterminer la composition effective des espaces de travail personnels pour connaître le travail géométrique existant. C'est pour cela qu'il est intéressant de comparer des copies d'élèves de différents pays confrontés à un même exercice ou à des présentations de théorèmes standards comme celui de Pythagore. En France, des travaux récents ont été réalisés sur ce thème notamment par Knipping (2003), Cabassut (2003) et Celi (2003).

Dans notre étude, nous allons montrer cette différence d'approche entre le Chili et la France à partir d'un exemple portant sur les grandeurs inaccessibles proposé à des futurs professeurs de Lycée en France (Université Louis Pasteur) et au Chili (Université catholique de Valparaiso).

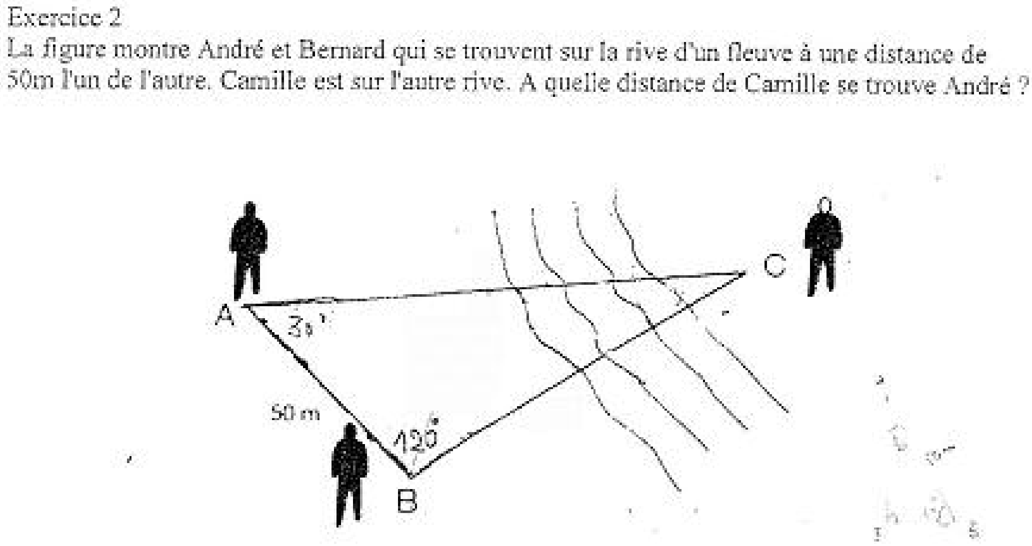
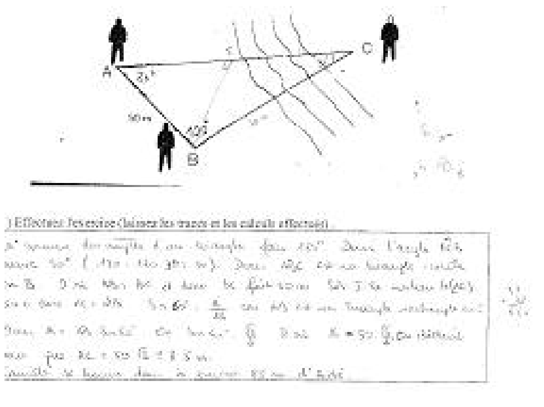


FIG. 5.9 – Un problème de grandeurs inaccessibles

Nous retenons ici deux copies qui suivent exactement la même démarche de résolution mais adoptent un mode de présentation radicalement différent.



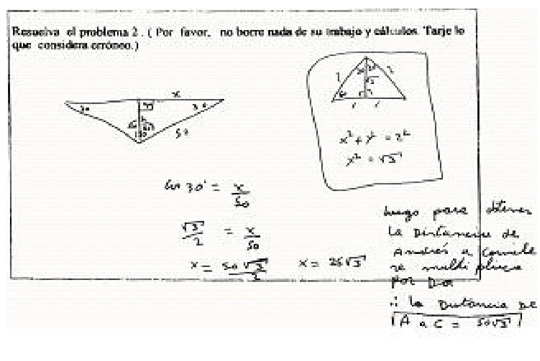


FIG. 5.10 – Une copie française et une copie chilienne

D'un côté, au Chili, un dessin codé qui contient les résultats d'un raisonnement qui n'est pas explicité par écrit. De l'autre, en France, un texte très détaillé que nous transcrivons ici et où aucune assertion, même la plus triviale, n'est omise.

La somme des angles d'un triangle fait 180°. Donc l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 30°

(180-120-30). Donc ABC est un triangle isocèle en B. D'où $AB = BC$ et donc BC fait 50 m.
Soit I le milieu de $[AC]$. On a donc $AC = 2AI$. Sin $60^\circ = \frac{AI}{AB}$ car AIB est un triangle rectangle en I.
Donc $AI = AB \sin 60^\circ$ Or $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $AI = 50\frac{\sqrt{3}}{2}$. On déduit donc $AC = 50\sqrt{3} \simeq 85\ m$
Camille se trouve donc à environ 85 m d'André

L'observation des classes au Chili montre que les traces écrites des activités sur le tableau sont souvent semblables à celle que nous avons reproduite. Elles sont accompagnées par un discours oral qui justifie les résultats alors qu'en France toutes les justifications doivent être écrites.

Ces différentes observations montrent qu'au delà de la différence bien marquée de conception de la géométrie chez les étudiants des deux pays, il y a aussi des invariants liés à la culture et aux habitus de deux pays à la fois proches par certains côtés mais fort éloignés par d'autre.

Annexe Codage du problème Charlotte et Marie / Carolina y Maria

Question 1 Pourquoi est-ce un losange ?
Aspect 1 : source de l'information IND
- Code 1 Utilisation exclusive des informations données dans l'énoncé.
- Code 2 Utilisation d'informations non données explicitement par l'énoncé.

Aspect 2 Pourquoi est-ce un losange ? CAR et ACC
- Code 1 Justification correcte basée sur une condition nécessaire et suffisante utilisant les cotés.
- Code 2 Justification correcte basée sur une condition nécessaire et suffisante mais sans utiliser les côtés.
- Code 3 Justification utilisant une accumulation d'arguments.
- Code 4 :Justification fausse

Question 2 Qui a raison ? Pourquoi ?
Aspect 3 Qui a raison ? CHA et MAR
- Code 1 : Charlotte
- Code 2 : Marie
- Code 3 : On ne peut pas savoir
- Code 4 : Les deux

Aspect 4a) Justification de la question 2 Pourquoi ? PYT
- Code 1 : Fait référence au théorème de Pythagore
- Code 2 : Ne fait pas référence au théorème de Pythagore

Aspect 4b) (Calculs) RAC et SRAC
- Code 1 : Calculs sans les racines carrées
- Code 2 : Calculs avec les racines carrées
- Code 3 : Sans calculs

Aspect 4c) (Arguments)
- Code 1 : Seulement avec les angles
- Code 2 : Seulement avec les côtés
- Code 3 : Avec les angles et les côtés

– Code 4 : Avec la diagonale
Aspect 4d) COR
– Code 1 : Arguments pertinents
– Code 2 : Arguments faux
Autres remarques
Aspect 5 Utilisation de la congruence des triangles
Code 1 : Oui
Code 2 : Non
Aspect 6 : Relation entre carrés et losanges LOS
Code 1 : Référence à la relation entre carrés et losanges
Code 2 : Aucune référence à cette relation
Aspect 7 : Présence de marques ou de traits sur le dessin FIG
Code 1 : Traces visibles ou référence dans la réponses à l'usage d'instruments
Code 2 : Traces non visibles

Question sur les doutes et les difficultés
Aspect 8a) (Connaissances) PROP
Code 1 : Doutes sur les connaissances des définitions et des propriétés
Code 2 : Pas de doutes exprimés sur ce point
Aspect 8b) (Dessin) DES
Code 1 : Doutes à propos du statut ou des renseignements donnés par le dessin
Code 2 : Pas de doutes sur ce point
Aspect 8c) (Approximation) APP
Code 1 : Doutes sur l'approximation
Code 2 : Pas de doutes sur ce point

Conclusion

La recherche menée par les deux équipes rattachées l'une à l'Université Catholique et Pontificale de Valparaiso et l'autre à l'Université Denis Diderot de Paris, avait pour but la comparaison de l'enseignement des mathématiques en France et au Chili avec l'ambition à terme d'apporter des éléments sur la comparaison plus générale des deux systèmes de formation chiliens et français.

Pour limiter ce sujet extrêmement vaste, l'étude a été restreinte à l'analyse de l'enseignement de la géométrie. Dans ce cadre, trois questions principales ont été envisagées sur lesquelles nous présentons à la fois l'état de notre réflexion et le chemin qui reste à parcourir pour les traiter complètement.

La place de la géométrie dans les objectifs d'éducation

Cette question a été abordée grâce à une succession d'analyses de plus en plus fines des objectifs énoncés dans les programmes officiels nationaux et repris dans les manuels d'enseignement.

Dans un premier temps, une comparaison de la liste des contenus obligatoires sur toute la totalité de la scolarité a été effectuée (enseignement primaire et secondaire en France, Básica et Media au Chili). Deux tableaux synoptiques visualisant toutes les connaissances géométriques mises en jeu dans les deux systèmes ont ainsi été élaborés. L'analyse s'attachait plus particulièrement aux concepts et théorèmes enseignés, aux procédures de construction avec instruments, aux formes de raisonnement en mathématiques et enfin aux savoirs de nature culturelle, sociale ou historique. Cette première étude a montré que le programme global chilien, jusqu'à dix-huit ans, proposait un ensemble de concepts et théorèmes équivalent à celui proposé dans la scolarité obligatoire française qui va jusqu'à seize ans. Le « temps didactique » est ainsi plus rapide en France qu'au Chili.

Mais, les deux pays diffèrent par ailleurs. Ainsi les programmes du Chili accordent une part plus importante à la pratique du « dessin géométrique » et comportent une part significative (dans l'enseignement au Lycée) d'histoire des mathématiques et d'étude des relations entre mathématiques et arts, cette dernière partie étant en France soit facultative soit réservée aux seuls étudiants des sections littéraires. De leur côté, les programmes français du Lycée destinés aux classes scientifiques, semblent pilotés par l'orientation universitaire de l'enseignement avec une première sensibilisation à des objets mathématiques qui seront généralisés à l'université (exemples de groupe non commutatif ou d'espace vectoriel). Cette remarque permet de retrouver les résultats d'études internationales comme TIMSS qui ont montré la spécificité française dans le domaine des « mathématiques avancées » par rapport aux « mathématiques de base ».

En complément à cette première étude, une analyse didactique des différences repérables dans les documents ministériels d'orientation et les manuels, a été conduite en utilisant les outils théoriques développés antérieurement en grande partie par des membres de l'équipe française (notion de registre sémiotique de représentation et paradigmes géométriques, Géométrie naturelle et géométrie axiomatique naturelle - Géométrie I et II -, notion d'espace de travail géométrique). Il s'agissait de mettre en évidence les particularités de chacun des espaces de travail géométriques des deux pays et de suivre leur évolution. Pour cela, les programmes et les documents d'accompagnement produits dans chacun des pays par le Ministère de l'Education ont été analysés pour l'ensemble du cursus. Ce travail a été suivi d'études locales sur trois thèmes géométriques communs aux deux pays : théorème de Pythagore, périmètre et aires du disque et enfin figures de même forme. Ces sujets apparaissent au Chili en septième et huitième année de la Básica pour les deux premiers thèmes et en deuxième année de l'enseignement Medio pour le dernier. En France, ces notions sont rencontrées dès la fin de l'enseignement primaire et travaillées jusqu'à la fin de l'enseignement secondaire.

L'étude fait apparaître des pratiques très contrastées d'un pays à l'autre. Au Chili, la Géométrie I domine dans toute la scolarité obligatoire ce qui se manifeste notamment par le refus d'un réel apprentissage de la « démonstration formelle » -*formal proof*-, et par l'insistance mise sur les activités de construction. Le dessin joue un rôle déterminant pour obtenir des résultats et remplit ainsi souvent une fonction proche de la carte en géographie ou du schéma pour un dessinateur : il est possible de s'appuyer directement sur elle pour résoudre un problème. Dans l'espace de travail géométrique ainsi développé, la visualisation et la construction sont privilégiées dans une approche expérimentale du domaine. L'évidence visuelle, la validation par une construction ou un pliage, l'utilisation de mesures sur un dessin restent ainsi autorisées très longtemps. Une transition entre les deux paradigmes géométriques s'amorce à la fin de la scolarité mais il est plus exact de dire qu'il n'y a pas de réelle initiation à la Géométrie II, aucun des résultats de cette géométrie ne s'appuie réellement sur un étayage démonstratif hiérarchisé. Le rôle attribué à cette Géométrie se résume à l'aspect technologique pointé par Chevallard : des résultats importés de la Géométrie II permettent de valider des pratiques menées en Géométrie I.

En France, l'apprentissage de la démonstration est visé dès la quatrième, il semble que cet apprentissage soit une des justifications majeures donnée à la présence d'un enseignement de la géométrie dans le cursus scolaire. Le fait que cette fonction d'introduction à la démonstration ne puisse être assumée entièrement en Géométrie I, motive sans doute le passage très précoce à la Géométrie II (au moins en géométrie plane). Dans l'espace de travail géométrique, cette insistance sur la démonstration se traduit par un bannissement rapide des instruments de construction comme supports d'information : la détermination des mesures se fait par calcul et non par recours aux instruments. De même, une certaine défiance par rapport aux constatations visuelles est mise en avant. La Géométrie développée ne se propose pas de résoudre des problèmes de la vie courante mais des problèmes internes à la géométrie même. Comme nous l'avons déjà évoqué, l'horizon mathématique universitaire justifie et oriente très précocement cet enseignement. Cependant, la forme actuelle de la Géométrie II proposée dans l'enseignement peut être qualifiée de forme « molle ». Le raisonnement démonstratif ne s'articule pas autour d'un système fort d'axiomes présenté comme tel aux élèves mais plutôt autour d'îlots de cohérence dont il n'est pas facile de percevoir l'articulation globale.

D'autre part, ces analyses ont montré que les deux pays, au moins dans leurs programmes officiels, accordaient une place importante aux activités d'enseignement permettant aux élèves de construire le sens des notions enseignées. Cependant au Chili, par le biais des exemples précis proposés par les documents ministériels, il semble exister une politique d'incitation institutionnelle plus active qu'en France. Ce point est renforcé par le mécanisme de la « licitación » qui permet au ministère de sélectionner les manuels autorisés dans les classes et conformes aux orientations officielles. Par ailleurs, le rythme de la progression curriculaire plus lent au Chili favorise la mise en place de cette démarche pédagogique que le rythme français rend plus difficile.

Enfin, l'enseignement de la géométrie accorde au Chili une vraie place aux situations liées aux pratiques sociales et professionnelles alors qu'en France ce point en reste au niveau des intentions générales.

La connaissance précise d'un système d'enseignement suppose aussi l'étude de l'enseignement donné dans les classes ordinaires aussi avons nous procédé à des observations conjointes de classes (un chercheur chilien et un chercheur français) en essayant de dégager les éléments les plus surprenants pour l'observateur étranger au système observé. Nous avons décidé de privilégier l'observation de l'enseignement donné dans certains niveaux d'enseignement plus cruciaux dans la mise en place de ces espaces de travail différents : en France le CM2, la sixième, la quatrième et la seconde, au Chili les niveaux 6 et 8 de la Básica et 1 et 2 de l'enseignement Medio. Les observations de classes ont permis d'observer ce que les anglo-saxons appellent des CPF (*Characteristic pedagogical flaw*) - nous parlerons plus modestement de styles d'enseignement - manifestement différents en France et au Chili. Citons deux points parmi les plus marquants : la gestion du tableau et la place de l'institutionnalisation. Cependant, les conclusions auxquelles nous parvenons sont trop pointillistes pour être qualifiées de scientifiques. Aussi, une étudiante chilienne (Andrea Pizarro) a entamé une thèse de doctorat à l'Université de Paris VII, qui porte spécifiquement sur l'observation de l'enseignement effectif de la géométrie en classe de septième et huitième au Chili. Les résultats qu'elle obtiendra pourront être comparés avec ceux déjà obtenus par des chercheurs de l'équipe Didirem et aussi avec l'étude internationale SMSO sur l'enseignement donné dans six pays dont la France.

Connaissances et conceptions de la géométrie

L'étude de la place de la géométrie dans les programmes nous a conduits à envisager la question des connaissances et des conceptions des futurs enseignants à partir de deux types d'enquête. La première porte davantage sur le rapport à la géométrie des étudiants, elle vise à mesurer les effets et les écarts entraînés par la différence des approches géométrique que nous avons relevée dans l'enseignement secondaire. La seconde demande aux étudiants de mettre en œuvre leurs connaissances sur des problèmes susceptibles d'être abordés avec des approches paradigmatiques différentes : l'enquête repose ainsi sur un choix de problèmes de géométrie pouvant être résolus avec des outils et des connaissances très variés. La méthodologie mise en œuvre a utilisé les travaux déjà développés par des membres de l'équipe pour comparer des approches de la géométrie dans les différents niveaux d'enseignement. Notons que cette étude a été menée sur des échantillons certes assez petits (à chaque fois 30 personnes) mais appartenant aux quatre types de population intéressés par le métier d'enseignant : professeurs d'école et de lycée en France, professeurs de la Básica et du Liceo au Chili.

L'analyse comparative du rapport des étudiants à la géométrie semble mettre en lumière de fortes différences quant à la perception des finalités du travail géométrique. Les étudiants chiliens privilégient les références à la modélisation de l'espace réel et aux applications des mathématiques, les français se placent plus volontiers à l'intérieur d'un espace clos d'axiomes, de théorèmes ou de définitions purement géométriques. D'autre part, les étudiants chiliens semblent avoir une vision plus positive de la géométrie que les étudiants français : elle leur apparaît facile et utile alors que pour les français elle est vue comme difficile et abstraite. Ces résultats corroborent les conclusions de notre étude curriculaire sur la place des mathématiques dans la société et dans l'enseignement. D'un côté une conception de la géométrie tounée vers ses applications au monde réel, de l'autre une vision de la géométrie comme un domaine particulier des mathématiques où s'exerce prioritairement le raisonnement déductif.

Quant à l'étude sur la résolution de problèmes ambigus, elle montre que les étudiants chiliens se placent plus spontanément en Géométrie I alors que les étudiants français sont majoritairement en Géométrie II pour les professeurs de Collège et Lycée et équirépartis pour les professeurs d'écoles. L'étude semble aussi révéler le niveau mathématique faible des professeurs de la Básica, ce point devrait être davantage étayé mais il rejoint un constat émis par le Ministère chilien de l'éducation. De plus, la manière de rédiger est également très différente, nettement plus formelle et discursive en France qu'au Chili, ce qui résulte dans doute de la différence d'importance accordée à la démonstration dans les deux pays.

La préparation au métier de professeur

Nous avons commencé à envisager la question de la formation des enseignants et notamment essayé de savoir comment les étudiants étaient aidés pour transformer dans une perspective d'enseignement, les connaissances de géométrie qu'ils avaient apprises à l'université et qu'ils devaient ensuite enseigner à l'École, au Collège et au Lycée.

Cette question, reliée à la précédente, reste encore largement en suspens et comme nous le supposions est très complexe à traiter. En effet, pour être correctement appréhendée, elle supposait menée à bien l'étude préalable présentée dans cet ouvrage. Il est en effet nécessaire d'avoir une représentation la plus fidèle possible de la situation existante dans chacun des deux pays avant de se lancer dans une étude fine de la comparaison des formations d'enseignants. D'autre part, aux différences déjà pointées dans cette étude, s'ajoute une différence radicale dans le recrutement et la formation initiale des professeurs. En France, cette formation est conduite dans les IUFM où sont accueillis en première année des étudiants licenciés de l'Université et en seconde année des professeurs stagiaires recrutés par le Ministère de l'Education. Tandis qu'au Chili, les étudiants s'engagent dès la première année de l'Université dans un cursus de neuf semestres qui leur donnera un diplôme de pédagogie pour enseigner en Básica ou pour enseigner les mathématiques au Lycée. Il leur faut ensuite se faire recruter soit dans le secteur public soit dans le secteur privé. Il n'y a pas de système centralisé de formation et celle-ci dépend des choix effectués par les Universités. Pour aborder ce sujet particulièrement complexe, une étudiante chilienne Elizabeth Montoya a obtenu une importante bourse de la part du gouvernement chilien pour engager un travail de thèse sur ce problème. Il s'agira notamment, pour elle, de préciser les diverses contraintes qui s'exercent sur la formation mais aussi d'observer des situations de formation dans les deux pays.

Perspectives

D'un point de vue plus scientifique, l'étude comparatiste entreprise a suscité l'élaboration et le développement des outils nécessaires pour mener à bien ce type d'enquête sur un domaine mathématique particulier et ceci dans un contexte international qui privilégie plutôt les études macroscopiques sans entrer précisément dans les contenus enseignés.

Pour l'équipe française, cette recherche a permis de tester différents outils élaborés dans le contexte de l'enseignement français et ainsi de voir leur pertinence dans un cadre différent.

D'autre part, la recherche a rendu possible l'étude concrète de deux conceptions très différentes de la géométrie effectivement enseignée et ainsi de renouveler notre réflexion sur la possibilité d'envisager d'autres approches de la géométrie dans l'enseignement. Il s'agit de penser un enseignement d'une géométrie mieux articulée à la réalité et à la demande sociale mais sans renoncer à l'ambition de développer le raisonnement déductif. Dans cette « Géométrie I assumée », le raisonnement s'exerce pleinement mais en privilégiant l'approximation et la maîtrises des contraintes de construction des figures. Cette manière de voir permet d'aborder de façon originale la thématique de la *mathematics litteracy* mise en avant par PISA et qui explique en grande partie la réussite des pays comme la Finlande ou les Pays-Bas déjà engagés dans un courant dit des *Realistic mathematics*. Suivant cette orientation, Caroline Bulf, a par ailleurs commencé une thèse à l'université de Paris 7 sur le rôle possible de la réalité et des pratiques techniques dans l'approche de l'enseignement de la symétrie au collège.

Enfin, en communiquant les résultats obtenus par notre groupe de travail, nous espérons lancer des collaborations avec d'autres équipes ou personnes intéressées par des études comparatiste des systèmes d'enseignement en suivant la perspective qui est la nôtre.

Bibliographie

Berthelot R., Salin M.H. (2000) L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N* **65** 37-59.

Briot C. (1863) *Éléments de géométrie.* Paris : Librairie de L. Hachette.

Bronner, A. (1998) Les rapports d'enseignants de Troisième et de Seconde aux objets nombre réel et racine carrée , *Recherches en Didactique des Mathématiques* **17.3** 55-80.

Bunge (1983) *Epistémologie.* Paris : Éditions Maloine.

Cabassut R. (2003) Enseigner la démonstration *Bulletin de l'APMEP* **449** 757-770

Carrega J.C. (1981) *Théorie des corps. La règle et le compas.* Paris : Hermann

Celi V. (2003) L'enseignement de la géométrie en France et en Italie : quels choix et quels effets sur la formation des élèves *Bulletin de l'APMEP* **449** 771-783.

Chalmers A. (1982) *What is the Thing Called Science ? An Assessment of the Nature and Status of Science and its Methods.* Traduction 1987 Qu'est ce que la science ? Paris : La Découverte Poche

Chevallard Y., Jullien M. (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie (première partie) *petit x* **27** 41-76.

Clarke D. (2003), International Comparative Research in *Second International Handbook of Mathematics Education* 143-184

CREM (2000) Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement. *Bulletin de l'Apmep* **430**.

Duval R. (1988) Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Sciences Cognitives et de Didactique de Strasbourg* **1** 57-74.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **10** 5-54.

Duval R. Godin M. (à paraître) Les changements de regard nécessaires sur la figure. *Grand N*

Fischbein E. (1993) The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* **24/2** 139-162.

Gonseth F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace.* Lausanne : Éditions du Griffon.

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres *Revue Petit X* **51** pp 5-21

Houdement C., Kuzniak A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* **20/1** 89-115.

Houdement C., Kuzniak A. (2003) Quand deux droites sont presque parallèles ou la version géométrique du presque égal. *petit x* **61** 61-74.

Houdement C., Kuzniak A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* **11** 175-193

ICMI (1998) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* New Icmi Studies vol 5 Kluwer.

Kaiser G, Luna E and Huntley I (1999) *International Comparisons in Mathematics Education* Falmer Press ISBN 0-7507-09026-2

Et notamment :

Beaton A.E and Robitaille D.F. An overview of the Third International Mathematics and Science Study pp 30-47

Cogan L.S. and Schmidt W.H. An examination of Instructional Practices in Six countries pp. 68-85

Keitel C and Kilpatrick J The Rationality and Irrationality of International Comparative Studies pp 241-256

Knight C and Valverde G. Explaining TIMSS Mathematics Achievement : A Preliminary Survey pp 48-67

Knipping C. (2003) Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement : analyses comparatives allemandes et françaises en quatrième *Bulletin de l'APMEP* **449** 784-796.

Kuhn T.S. (1962, 2e édition 1966) The Structure of Scientific Revolutions Traduction La structure des révolutions scientifiques 1983. Paris : Flammarion

Kuzniak A (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques.* Irem Paris 7 ISBN 2-86612-2486-8.

Kuzniak A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education.* **6.2** 167-187.

Kuzniak A. et Rauscher J. C. (2003) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du colloque sur la formation des maîtres. La Roche sur Yon.* Université de Nantes pp 271-290

Laborde C. (1988) L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques . *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9/3. 337-364.

Niss M (2003) Mathematical competences and the learning of mathematics : the Danish KOM-project sur le site http ://www7.nationalacademies.org/

OCDE (2003) The PISA assessment framework sur le site www.pisa.oecd.org

OCDE (2004) Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003 sur le site www.pisa.oecd.org

Parzysz B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, **19/1** 78-91.

Pluvinage F. (1998) La nature des objets mathématiques dans le raisonnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **6** 125-138.

Pluvinage F., Rauscher J.C. La géométrie construite mise à l'essai, *petit x* **11** 5-36.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies.* Paris : Armand Colin

Royal Society (2001) *Teaching and Learning Geometry*

Richard P. R. (2004) L'inférence figurale : Un pas de raisonnement discurso-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, **57/2** 229-263.

Robert C., Treiner J. (2004) Une double émergence. *Bulletin de l'APMEP* **453** 499-510.

Winsløw C. (2005) Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : la dialectique matières-compétences *Annales de didactique et de sciences cognitives* **10** 131-156

Tableaux synoptiques

Comparaison des contenus enseignés pendant la scolarité primaire et secondaire

Cette annexe présente sous forme de tableaux une vision synoptique des contenus d'apprentissage réglementaires en géométrie, de l'élémentaire jusque dans les classes scientifiques du lycée et de l'Enseñanza Media respectivement. Cette étude permet de constater que, à peu de choses près et à horaires annuels sensiblement équivalents, les contenus enseignés au long de la scolarité chilienne dans l'enseignement non professionnalisé correspondent aux programmes de la scolarité obligatoire en France, de l'école élémentaire à la classe de Seconde de l'enseignement général.

Par contre, on constate que la liste des contenus contient au Chili plus d'items consacrés à la pratique du dessin géométrique. Enfin le programme du Medio comprend des éléments précis relatifs à l'histoire des mathématiques, y compris à l'histoire récente, et aux relations des mathématiques avec les arts ce qui en France apparaît au mieux dans les éléments facultatifs ou dans les classes littéraires.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous complétons cette étude de façon à étayer la conclusion suivante : en France, l'enseignement obligatoire des mathématiques est piloté par l'enseignement supérieur des mathématiques, considérées dans leur développement propre ; au Chili, est visée une formation pour tous, faisant une large part aux applications des mathématiques.

Descriptif de la scolarité

La scolarité au Chili comporte deux phases : éducation dite basique (8 ans), éducation dite moyenne (4 ans) . La scolarité est obligatoire de 6 à 18 ans depuis 2002. Dans la suite nous noterons les niveaux chiliens de la façon suivante : 5B désigne la cinquième année de l'enseignement basique, 2M la deuxième année de l'enseignement moyen.

En France, la scolarité est également divisée en deux phases : enseignement primaire (5ans), enseignement secondaire (7ans), ce dernier se déroulant dans deux institutions différentes, collège (4 ans) et lycée (3 ans). La scolarité est obligatoire de 6 à 16 ans.

Équivalence des classes

France	Ecole élémentaire		Collège				Lycée		
classe	Cycle2 CP CE1	Cycle 3 CE2 CM1 CM2	$6^{ème}$	$5^{ème}$	$4^{ème}$	$3^{ème}$	2^{nde}	$1^{ère}$	Terminale
Chili	Básica					Media			
Curso	1° ; 2 ; 3 ; 4°	5°	6°	7°	8°	1°	2°	3°	4°

Au Chili, les deux dernières années de l'Enseñanza Media proposent aux élèves de choisir un enseignement optionnel, la *formación diferenciada, humanistico cientifica* ou tecnico-profesional. La formation différenciée humaniste-scientifique correspond à un approfondissement de certaines matières de la formation générale ; la formation différenciée technico-professionnel correspond à une spécialisation dans certains secteurs professionnels (par exemple métiers du bois, agriculture, construction, électricité...). Nous nous restreignons à la première et au sein de celle-ci à l'approfondissement en mathématiques.

En France, dans les lycées d'enseignement général, les élèves se spécialisent à l'issue de la Seconde et peuvent choisir une filière scientifique. Nous nous sommes intéressés exclusivement aux programmes de cette filière. En fin de Première, les élèves doivent à nouveau choisir une spécialité (Biologie, Mathématiques ou Physique). Le programme de Terminale S est donc composé d'une partie commune et d'un programme spécifique pour les élèves qui choisissent la Spécialité mathématique.

Comparaison des horaires français et chiliens

Il s'est révélé assez difficile de comparer les horaires attribués aux mathématiques aux différents niveaux de la scolarité dans la mesure où au Chili les horaires sont flexibles. Ceci répond à la diversité (régions, établissements) et permet l'innovation, à l'intérieur de standards nationaux : aux heures explicitement attribuées aux différentes dimensions de la formation s'ajoutent un contingent d'heures à Libre Disposition dont l'utilisation est déterminée par les établissements, ceux-ci peuvent ainsi augmenter le volume minimum conseillé dans le curriculum général, en proposant par exemple des ateliers complémentaires dans certaines disciplines :

> El ámbito de Libre Disposición, corresponde a un espacio para ser llenado por las definiciones curriculares y extracurriculares de los establecimientos. En este sentido, no es regulado por las deficiones de objetivos y contenidos del presente marco.

Le tableau suivant, pour l'Enseñanza Media, donne une idée de la variabilité ainsi créée :

Cuadro N°1 **Marco temporal de la Formación Humanística - Científica**

Nivel	Formación General HORAS Semanales	Anuales	Formación Diferenciada HORAS Semanales	Anuales	Libre Disposición HORAS Semanales	Anuales
1°	33	1.287	0	0	9	351
2°	33	1.287	0	0	9	351
3°	26	1.014	10	390	6	234
4°	26	1.014	10	390	6	234
Total Anual		**4.602**		**780**		**1.170**
%		70%		12%		18%

(Total 4 años de Educación Media: 6.552 horas)

Il ressort de différents entretiens que nous avons pu avoir[5], que les établissements utilisent fréquemment ces heures pour augmenter l'horaire attribué aux mathématiques. Ainsi dans les deux dernières années de l'Enseñanza Básica -B7 et B8-, l'horaire minimale est de 4 périodes, il est en réalité généralement de 6 périodes ; dans l'Enseñanza Media, on trouve en général 5 périodes en M1 et M2, 3 périodes en M3 et M4 auxquelles s'ajoutent 3 périodes pour l'option.

Le tableau suivant doit donc être considéré à titre indicatif :

<table>
<tr><td>France</td><td colspan="3">Ecole élémentaire</td><td colspan="4">Collège</td><td colspan="4">Lycée</td></tr>
<tr><td>classe</td><td>Cycle2
CP CE1</td><td colspan="2">Cycle 3
CE2 CM1 CM2</td><td>6ème</td><td>5ème</td><td>4ème</td><td>3ème</td><td>2nde</td><td colspan="2">1ère S</td><td>Terminale S</td></tr>
<tr><td>horaires hebdomadaires</td><td>de 5h à 5h30 (+19% temps)</td><td colspan="2">de 5h à 5h30
(+19% temps)</td><td>4h</td><td colspan="2">3h30 ou 4h30
si itinéraire de découverte</td><td>4h</td><td>4h
dont 1h module</td><td colspan="2">5h
dont 1h dédoublée</td><td>5h30 +
2h spécialité</td></tr>
<tr><td>Chili</td><td colspan="6">Básica</td><td colspan="5">Media</td></tr>
<tr><td>curso</td><td colspan="2">1° ; 2 ; 3 ; 4°</td><td>5°</td><td>6°</td><td>7°</td><td>8°</td><td>1°</td><td colspan="2">2°</td><td>3°</td><td>4°</td></tr>
<tr><td>horaires</td><td colspan="2">6h</td><td>4h</td><td>4h</td><td colspan="2">entre 4h et 6h</td><td colspan="3">entre 4h et 5h</td><td colspan="2">Entre 2h30 et 3h +
Idem pour option math</td></tr>
</table>

Comme il est d'usage dans les textes officiels, nous utilisons dans ce tableau la notion d'heures pour désigner en réalité des périodes, celles-ci sont de 45 minutes au Chili, de 55 minutes en France. Par ailleurs, l'année scolaire comprend 39 semaines au Chili, environ 35 au Primaire et au collège en France, plutôt 31-32 au lycée.

Dans ce contexte assez flou, nous retenons que les horaires sont sensiblement équivalents, la classe de Terminale S avec Spécialité mathématique étant la seule exception.

Pour dresser les tableaux synoptiques présentés dans ce chapitre, les documents pris en compte sont essentiellement les textes réglementaires, les différents accompagnements (introduction, commentaires et Accompagnement proprement dits) interviennent ici a minima, uniquement s'ils explicitent des contenus précis. L'étude commence en cinquième année de la scolarité.

Les différentes rubriques présentes dans les tableaux synoptiques

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux concepts et théorèmes enseignés en géométrie plane puis en géométrie dans l'espace ; les données sont organisées suivant quatre rubriques : configurations, transformations, vecteurs, grandeurs et mesures.

Puis, en lien avec la problématique théorique présentée dans le chapitre précédent, nous présentons les objectifs d'apprentissages liés d'une part au dessin aux instruments et à la réalisation de représentations d'objets de l'espace, d'autre part, à la maîtrise du raisonnement et de la démonstration.

Nous terminons par un descriptif des éléments relatifs à une approche culturelle des mathématiques, dont nous nous sommes aperçus qu'elle occupait une place importante au Chili dans les textes réglementaires.

Remarques pour la lecture L'expression Voc apparaît pour signifier que le programme exige l'utilisation d'un vocabulaire précis essentiellement dans des tâches d'ordre

[5] C.Houdement a en particulier rencontré en Novembre 2004 plusieurs collègues chiliens responsables au niveau national de l'établissement des curricula en mathématiques

descriptif. Pour le tableau du Chili, les éléments figurant en italique sont issus des situations proposées par les documents d'accompagnement mais non explicités dans les contenus introductifs.

Un premier bilan synthétique

Deux orientations différentes pour l'enseignement des mathématiques

Un corpus plus étendu de savoirs strictement mathématiques en France

L'étude des programmes à travers les tableaux synoptiques fait apparaître que, pour des durées d'enseignement sensiblement équivalentes, l'ensemble des concepts et théorèmes du programme chilien de géométrie, à quelques éléments près, équivaut au programme de la scolarité obligatoire en France qui va jusqu'à 16 ans et se termine en Seconde.

Si l'on considère les objets du savoir savant, l'avancée du temps didactique est donc nettement plus rapide en France qu'au Chili.

Une analyse plus précise des contenus enseignés dans les classes scientifiques des deux dernières années du lycée en France montre l'orientation universitaire de l'enseignement. Les élèves ont l'occasion de rencontrer des exemples d'objets qui seront définis et étudiés à un niveau de conceptualisation plus élevé à l'université, ces exemples pouvant alors constituer un point d'appui pour la compréhension du cas général :

- Première rencontre avec un espace vectoriel (dimension 2 et 3), avec un produit scalaire, avec un espace affine euclidien (sous-espaces affines, barycentres, présentations des principales applications affines dont en dimension 2 les isométries et similitudes ; aspects analytiques)
- Première rencontre avec un groupe non commutatif (groupe des similitudes)
- Première rencontre avec des fonctions de plusieurs variables.

Nous faisons l'hypothèse qu'en France les programmes des classes scientifiques sont pilotés par les exigences de l'université ; ils doivent assurer le bagage minimal considéré comme indispensable par les mathématiciens qui enseignent à ce niveau. Cette fonction reste implicite dans les programmes sauf pour la notion de groupe

> Avec l'étude des similitudes planes, on vise à la fois une synthèse des études antérieures sur les transformations et une première approche implicite de la structure de groupe (Programme de Terminale S Enseignement de spécialité)

Ce même thème des similitudes est l'occasion d'une seconde manifestation de cette perspective d'anticipation :

> Pourquoi l'étude des similitudes ? Une telle étude permet d'abord une synthèse de tous les aspects de géométrie plane étudiés. Elle permet ensuite de construire un ensemble théorique consistant : les élèves de spécialité pourront être ainsi confrontés à une expérience mathématique fondamentale, celle de bâtir un *morceau* de l'édifice mathématique. (Terminale S - Accompagnement des programmes - Programme de spécialité, Similitudes p.60)

Cette orientation vers l'université des deux dernières années a pour effet de diminuer le temps imparti à l'enseignement des éléments du savoir mathématique que les deux pays estiment constituer la culture géométrique nécessaire à toute personne.

On peut comprendre que dans ces conditions, le temps consacré à chaque notion et notamment aux divers travaux nécessaires à son apprentissage, le temps consacré plus généralement à la pratique mathématique des élèves est réduit en France par rapport aux possibilités offertes par le rythme chilien. Nous verrons, d'abord dans le chapitre suivant, consacré à une étude de l'espace de travail géométrique puis plus précisément dans les trois études thématiques, que l'enseignement chilien accorde une grande place aux activités préparatoires aux résultats enseignés. Dans le temps plus réduit dont il dispose pour chaque notion, l'enseignement français, malgré les déclarations d'intentions générales, choisit de développer surtout les travaux de mise en fonctionnement des théorèmes.

Des mathématiques mieux insérées dans la culture artistique, historique, scientifique et professionnelle au Chili

Si les programmes français sont plus ambitieux quant aux contenus proprement mathématiques, les tableaux synoptiques montrent clairement que les programmes chiliens sont plus attentifs que leurs homologues français à l'enseignement des techniques du dessin géométrique. Par ailleurs, le programme de l'Enseñanza Media comprend des éléments précis relatifs à l'histoire des mathématiques, y compris à l'histoire récente, (Apports d'Euclides au développement de la géométrie 1M, de René Descartes au développement de la relation entre algèbre et géométrie 2M.Théorème de Fermat-Wiles 3M, Fractales 4M-Option) et aux relations des mathématiques avec les arts (Escher 1M, Razon aurea 2M), ce qui en France apparaît au mieux dans les éléments facultatifs ou dans les classes littéraires.

Ainsi l'enseignement chilien chercherait à mettre en relation les mathématiques avec les autres domaines culturels. Cette impression est confirmée par une étude des situations proposées dans les textes d'accompagnement du Mineduc. Il apparaît alors que le système chilien accorde une place importante à l'utilisation des connaissances enseignées dans le traitement de situations de la vie quotidienne ou professionnelle, des situations nécessitant, au moins partiellement, une certaine modélisation par les élèves. Nous en donnons ci-dessous quelques exemples représentatifs extraits des suggestions du Ministère et renvoyons aux études thématiques pour d'autres développements. Ce point différencie les deux pays puisque, en dépit des déclarations générales d'intentions, le système français privilégie les applications internes aux mathématiques. Seule la brochure d'accompagnement de Terminale S propose des exemples interdisciplinaires.

Les exemples suivants ont été choisis pour donner une idée du caractère véritablement concret et ouvert sur les milieux professionnels des activités suggérées au long de la scolarité

- Réalisations d'objets matériels · 6B : une situation évoque la possibilité de construire des objets de mesures déterminées (par exemple une niche pour lapin). Aucune modélisation par un dessin n'est fournie aux élèves à qui on demande au contraire de réaliser eux-mêmes un plan à l'échelle. Une remarque est intéressante en ce qu'elle envisage explicitement une possibilité de réalisation effective et pose alors les difficultés inhérentes à un travail sortant du micro-espace de la feuille de papier

  > Si construyen efectivamente alguno de los objetos propuestos, deberán enfrentar el desafío de dibujar rectas paralelas [...] en pliegos grandes de papel, por ejemplo. Esto plantes desafíos adicionales mayores que dibujar en hojas de cuaderno, por ejemplo. p. 110

- Enquête auprès de certaines professions ou dans l'environnement.
  8B : les élèvs doivent rencontrer des artisans (menuisiers, traceur de terrain de sports...), pour savoir pourquoi ils sont conduits à tracer des cercles et comment ils font (par ex, fabrication d'une table ronde).

1M : dans une unité consacrée aux isométries, sont proposées les activités suivantes, la seconde étant une activité pour l'évaluation :

> Reconocen simetrías, rotaciones y traslaciones en la naturaleza y en obras de arte tales como las de Escher, el palacio de la Alhambra, algunas artesanias, etc. "
>
> "Diseñar composiciones sencillas y describir y analizar transformaciones isométricas presentes en el arte, en la naturaleza, en el mundo de la ciencia y/o en diseños estructurales y tecnológicos.

- Détermination de grandeurs inaccessibles dans des situations réelles.
  3M : détermination de la hauteur d'un immeuble dont le pied est inaccessible, il faut faire deux visées angulaires. Un dessin accompagne l'énoncé, les grandeurs mesurées sont désignées, mais la modélisation algébrique est partiellement à la charge des élèves car il faut introduire deux autres grandeurs, l'inconnue et une longueur intermédiaire. Cet énoncé ne contient aucune mesure. Il pourrait être traité de manière littérale (c'est le cas en France en Première S) mais les points suivants laissent penser que ce n'est pas ce qui est attendu :

> Es también conveniente dejar que los estudientes constaten, comparando sus resultados que si la diferencia entre a y a' [les mesures d'angles] es pequeña se puede incurrir fácilmente en un error excesivo, de un 10 % o más, en la estimación obtenida para la altura de la torre .
>
> Si es necesario medir el angulo de elevación, se puede construir un goniómetrico artesanal, elaborado con un transportador, un hilo de plomo y un tubo de más o menos 15 a 20 cm de largo, como lo ilustra el siguiente dibujo. [suivent un dessin et un petit texte expliquant comment fabriquer cet instrument]" pp.84-85

On voit donc nettement poindre une problématique réaliste, proche de celle qui est utilisée en Physique.

Dans la même unité, 8 tâches différentes sont proposées pour l'évaluation, 4 renvoient à des problèmes concrets, deux ne sont accompagnés d'aucun dessin et il est recommandé au professeur de s'intéresser dans son évaluation au fait que les élèves réussissent ou non à schématiser la situation. Ceci confirme l'importance accordée à ce type de travaux.

Conclusion

Même si l'étude présentée dans cette annexe s'en tient à une description de surface, nous nous autorisons à formuler dès à présent un premier résultat qui sera confirmé par les chapitres suivants. Nous retenons ce qui apparaît comme une différence notable d'orientation entre les deux systèmes :

- Piloté par une visée universitaire, l'enseignement français réduit à 10 ans la formation commune en mathématiques ; ceci lui permet de proposer un enseignement spécialisé en Première et Terminale qui constitue une propédeutique à l'enseignement supérieur scientifique. Dans ce contexte, les mathématiques sont essentiellement travaillées pour elles-mêmes.
- Les 12 années de l'enseignement obligatoire chilien sont consacrées à délivrer une formation en mathématiques susceptibles de s'intégrer à la culture de base de tout citoyen. Les mathématiques sont présentées dans la diversité de leurs liens avec les autres dimensions, y compris professionnelles, de la culture humaine.