**Alain Kuzniak, Philippe R. Richard**

**Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas**

Este número especial de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME) es el resultado de distintos artículos elaborados para el tercer simposio Espacio de Trabajo Matemático (ETM), cuyo , objeto de estudio es el desarrollo y los usos posibles de la noción de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en la didáctica de las matemáticas. El trabajo matemático y su funcionamiento en el marco escolar están a la base del enfoque de los ETM. En esta introducción se sintetiza el enfoque teórico, no como algo prescriptivo sino como una propuesta sugerente para enriquecer el estudio didáctico del trabajo matemático de alumnado y profesorado. Seguidamente, se describe la organización temática de las contribuciones.

1. **Una perspectiva didáctica sobre el trabajo matemático**.

A partir de la década de los sesenta se produjo un cuestionamiento fuerte de la enseñanza de las matemáticas a nivel mundial. Antes de este periodo, los sistemas escolares ofrecían dos tipos de enseñanza a los ciudadanos de los países desarrollados. De una parte, una enseñanza corta y esencialmente utilitarista de las matemáticas elementales, propuesta a los niños de los contextos populares. Y por otra parte, a los niños de la burguesía, destinados a tomar las riendas de la economía y la gestión de los países, se les daba acceso a una enseñanza de las matemáticas vista como una escuela del razonamiento lógico. En ambos casos, al alumno se le hacía desempeñar el rol de receptor del saber de los maestros. A partir de los años sesenta, diversos fenómenos contribuyeron a cambiar los puntos de vista sobre el rol de las matemáticas y sobre la manera de enseñarlas. Sin querer ser exhaustivos, podemos señalar la reforma de las matemáticas modernas, el desarrollo de las investigaciones sobre los aprendizajes, o incluso, la masificación de la enseñanza, en un contexto de mayor competencia económica e ideológica.

Para nuestros fines, subrayaremos dos profundas características de los cambios que se acentuaron desde entonces: de una parte, hacer evidente la diversidad del trabajo del matemático visto como el motor principal de la evolución matemática y, por otra parte, la idea pedagógica de promover la actividad del alumno con miras a hacerlo más apto para desarrollar sus conocimientos en un contexto de resolución de problemas. En este caso, el trabajo matemático está en el corazón de la evolución, lo que lleva lógicamente a proporcionar a esta noción un lugar central en la didáctica de las matemáticas.

El trabajo al que nos referimos está basado en una actividad racional orientada hacia un objetivo particular que puede apoyarse o no en el uso de un cierto número de instrumentos y artefactos específicos. En matemáticas, el objetivo de esta actividad estará centrado en los objetos estudiados por los matemáticos, «estos seres humanos que hacen que avance la comprensión humana de las matemáticas» (Thurston, 1995, p. 29). Por lo tanto, consideramos que la investigación didáctica, en el marco de una enseñanza que favorezca el desarrollo del trabajo matemático del alumno, debe interrogarse sobre este trabajo desde el doble punto de vista del aprendizaje de los alumnos, y de la organización de la enseñanza por el profesor.

2. **La noción del Espacio de Trabajo Matemático**.

La noción general de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) amplía la noción de espacio de trabajo para la geometría, introducida por Kuzniak y Houdement (Kuzniak, 2006) en el estudio de la didáctica de este ámbito. Esta noción se precisa con objeto comprender mejor lo que, desde el punto de vista didáctico, se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un marco escolar. El espacio concebido de esta manera designa, un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resuelver problemas matemáticos. En el caso de las matemáticas escolares, estos individuos generalmente no serán expertos sino alumnos o estudiantes, bien a nivel de principiantes o avanzados. Del estudio inicial de este concepto en Geometría, conservamos el principio que articularel ETM en dos niveles (Kuzniak, 2011): uno de naturaleza epistemológica, en relación estrecha con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado y, el otro, de naturaleza cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas.

El trabajo matemático deriva, entonces, de un proceso que poruna parte da sentidode manera progresiva, a cada uno de los niveles epistemológico y cognitivo y, de otra parte, permite la articulación de estos dos niveles gracias a diferentes génesis. En el caso de la Geometría, el conjunto del proceso se describió a partir de elementos del diagrama precisado en la Fig. 1. Éste necesitará ciertas modificaciones para adaptarlo al marco general de los ETM:

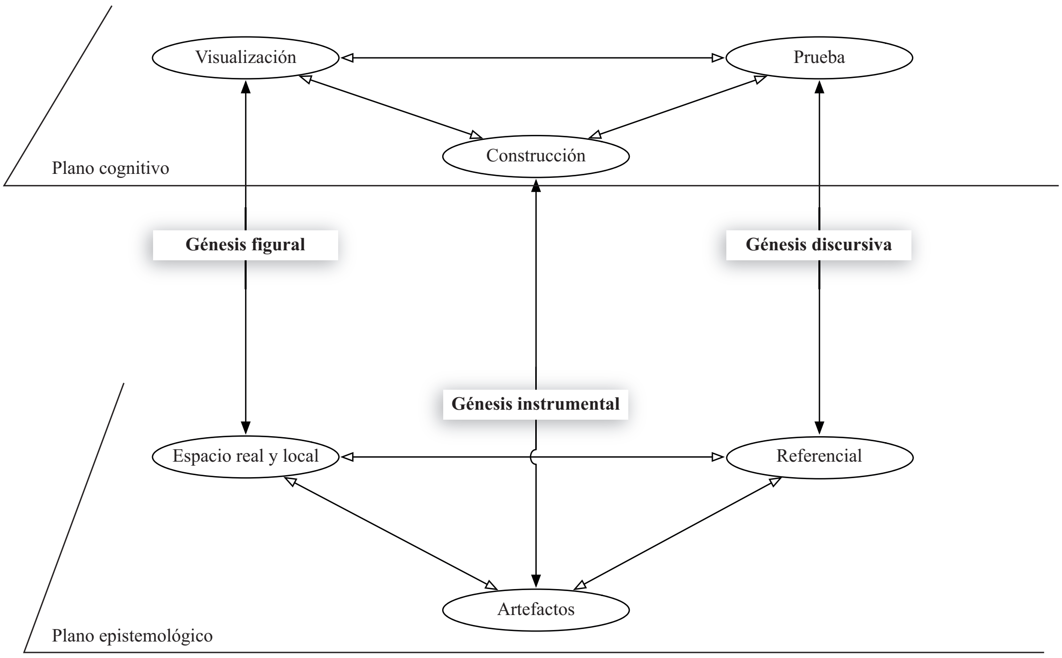


**Figura 1** - El espacio de trabajo geométrico y sus génesis

2.1 El nivel epistemológico y sus componentes.

En lo que concierne a la Geometría, tres componentes en interacción son características de la actividad geométrica en su dimensión puramente matemática:

- un espacio real y local como soporte material, con un conjunto de objetos concretos y tangibles;
- un conjunto de artefactos como herramientas de dibujo o software;
- un sistema teórico de referencia basado en definiciones y propiedades.

Estas componentes no están yuxtapuestas, deben ser organizada según un objetivo que depende del ámbito matemático en su dimensión epistemológica. Cuando el acento se pone en el proceso de aprendizaje del alumno, en una situación didáctica, este nivel epistemológico se puede considerar también como un *medio epistemológico* (Coutat y Richard, 2011).

Si los artefactos y el referencial teórico son dos componentes base del nivel epistemológico, asociado a un ámbito matemático particular, la componente ligada al espacio y a las configuraciones geométricas debería ser modificada si se quiere a extender a otros ámbitos matemáticos. De acuerdo con una concepción de las matemáticas fundamentada en representaciones semióticas, que va más allá de la pura consideración de sistemas de representación, parece pertinente utilizar la noción de signo o *representamen*, en el sentido de Peirce. Así, el signo o representamen es "algo" que representa otra cosa, que sea su objeto o quizá él mismo. En función del ámbito matemático en cuestión, los signos podrán ser dibujos geométricos, símbolos algebraicos o gráficas, incluso fichas, maquetas o fotos, en el caso de problemas que ponen en juego la modelización. A diferencia de los signos de estructura diádica, tan habituales en matemáticas, la idea de un signo que también es su propia representación invita a considerar de otra manera el proceso semiótico cuando el trabajo matemático está en juego. Esto es especialmente visible cuando un dibujo geométrico (él mismo de una forma) es a la vez *representamen* y modelo de representación (Coutat, Laborde y Richard, 2013).

## 2.2 El nivel de los procesos cognitivos.

Las matemáticas que se enseñan no son un corpus desprovisto de propiedades y objetos reducidos a significantes manipulables mediante sistemas formales. De entrada, las matemáticas son principalmente una actividad humana. De esta manera, es esencial comprender cómo comunidades de individuos, pero también individuos particulares, utilizan y se apropian de los conocimientos matemáticos en sus prácticas de la disciplina. Asimismo, es esencial comprender cómo se va a dar un sentido a estos signos y objetos tangibles. Lo que implica un segundo nivel del ETM, centrado en el sujeto, que a su vez, se contempla como sujeto cognitivo. Esta apertura hacia el campo cognitivo se debe realizar en estrecha relación con las componentes del nivel epistemológico y, para continuar en un marco didáctico, se efectúa una adaptación del enfoque semiótico propuesto por Duval (1995, 2005). Para la actividad geométrica, estos procesos son:

- un proceso de visualización relativo a la representación del espacio y al soporte material;
- un proceso de construcción que depende de los instrumentos utilizados (regla, compás, entre otros) y configuraciones geométricas en juego;
- un proceso discursivo que produce argumentaciones y pruebas.

El proceso de visualización necesita ser precisado para encontrar su lugar en una extensión a los ETM. También, se debe asociar a esquemas y operaciones de uso de los signos, de los que nada nos prueba que dependan, a priori, de la visualización en sí, incluso en una concepción extensa de ésta (Fig. 2).

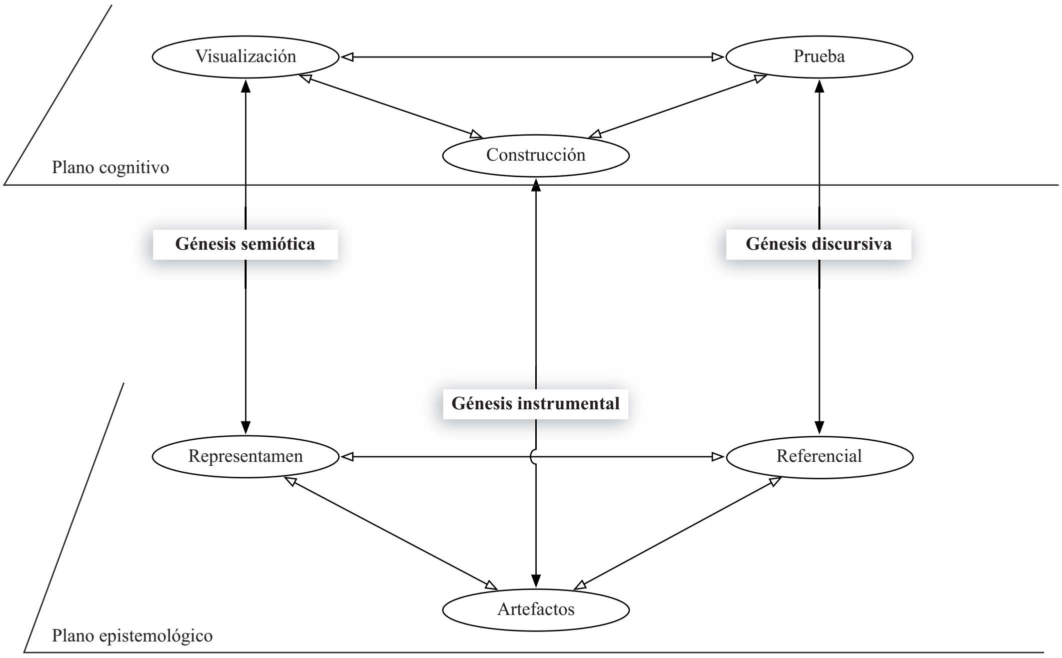


**Figura 2** - El espacio de trabajo matemático y sus génesis

Este proceso de visualización «extensa» se debe distinguir de la simple visión o percepción de los objetos, y se puede considerar como el proceso de estructuración de las informaciones aportadas por los diagramas y los signos. Además, este proceso alimenta la intuición de las propiedades y, a veces, fundamenta cognitivamente la validez de estas propiedades. Bajo ciertas condiciones, puede emparentarse con un razonamiento de tipo discursivo-gráfico (Richard, 2004) y podrá expresarse al interior de registros de representación semiótica determinados.

## 3. Los ETM de referencia, idóneos y personales.

En el marco teórico de los ETM, así como en el de los ETG, la noción de paradigma orienta y estructura la organización de las componentes que, debido a sus funciones diferentes, participan en la especificidad de los diversos paradigmas en juego. Un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento. Al espacio de trabajo «paradigmático», tal como es definido por esta comunidad, se le llamará *ETM de referencia*. En una institución escolar dada, la resolución de un problema supone que un ETM idóneo se puede organizar para permitir a un alumno comprometerse en la resolución del problema. Este ETM idóneo debe necesariamente cumplir dos condiciones: por una parte, posibilitar el trabajo en el paradigma correspondiente a la problemática considerada; de otra parte , estar «bien construido», en el sentido en que sus diferentes componentes están organizadas de manera válida. El diseñador desempeña un rol parecido al del arquitecto que diseña un espacio de trabajo para usuarios potenciales. En clase, el diseño de este espacio va a depender del ETM personal del profesor. Cuando el problema se proponea un alumno, el tratamiento matemático que éste le dá le conduce al ETM personal de este alumno. Debido a esto, el *ETM idóneo* no es fijo y se debe modificar continuamente para ajustarse a las restricciones locales.

De esta manera, el trabajo matemático en un marco escolar se puede describir gracias a tres niveles de ETM: la matemática considerada por la institución que se describe en el ETM de referencia. Éste es desarrolladopor el profesor hasta alcanzar un ETM idóneo que permita un establecimiento efectivo en clase, donde cada alumno trabaja en su ETM personal.

La elección y la organización de las tareas propuestas a los alumnos por los profesores son esenciales en la constitución del ETM idóneo. Ofrece la posibilidad de resolver, de manera adecuada, lo que se lespropone, es decir, conforme a las expectativas institucionales descritas de manera más o menos explícita en el ETM de referencia. Estas elecciones y la gestión de las actividades van a depender, en gran parte, del ETM personal del profesor. La observación de la actividad de los alumnos permitirá identificar sus ETM personales identificando posibles subconjuntos de prácticas estables.

4. **Las génesis de los ETM**.

El desarrollo por un individuo de su trabajo matemático se lleva a cabo gradualmente y pasa por el establecimiento progresivo de su ETM personal. Esta génesis global del ETM supone un conjunto de génesis que son interdependientes y que involucran a todas las componentes epistemológicas y a los procesos cognitivos. La activación y el control de estas génesis se pueden iniciar por los profesores (en el nivel del ETM idóneo). Es importante saber en qué medida, éstas se adecuan en su origen, a las expectativas definidas en el ETM de referencia (Kuzniak y Rauscher, 2011; Kuzniak, 2013).

Como lo vimos, los niveles epistemológico y cognitivo estructuran los ETM y ayudan a comprender la circulación de los conocimientos en el seno del trabajo matemático. ¿Cómo articular de manera operatoria los niveles epistemológicos y cognitivos con el fin de hacer posible el trabajo matemático esperado? Nos parece adecuado apoyarse en tres génesis fundamentales que derivan del marco teórico desarrollado previamente.

- una génesis instrumental que hace funcional les artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático ;
- una génesis semiótica basada particularmente en los registros de representación semiótica, que proporciona un sentido a los objetos del ETM y les confiere su estatus de objetos matemáticos operatorios; esta génesis semiótica asegura, el establecimiento de la relación entre sintaxis, semántica, función y estructura, de los signos vehiculados;
- una génesis discursiva de la prueba que utiliza las propiedades en el referencial teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de una validación no exclusivamente icónica, gráfica o instrumentada.

A fin de definir el trabajo geométrico en el marco de los ETG, Coutat y Richard (2011) describen las interacciones específicas del enfoque geométrico (ver Fig. 4) caracterizando los tres planos verticales que aparecen en el diagrama de los ETG. En nuestro afán de construcción teórica de los ETM que generalizan los saberes adquiridos en la investigación sobre los ETG, los planos verticales introducidos, de este modo, se podrían conectar con las diferentes fases del trabajo matemático implementado en la ejecución de una tarea: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación. De hecho, la ejecución efectiva de estas fases definirá un cierto número de competencias matemáticas cognitivas fundamentadas en la coordinación de las génesis en sus relaciones con el plano epistemológico (Fig. 3).

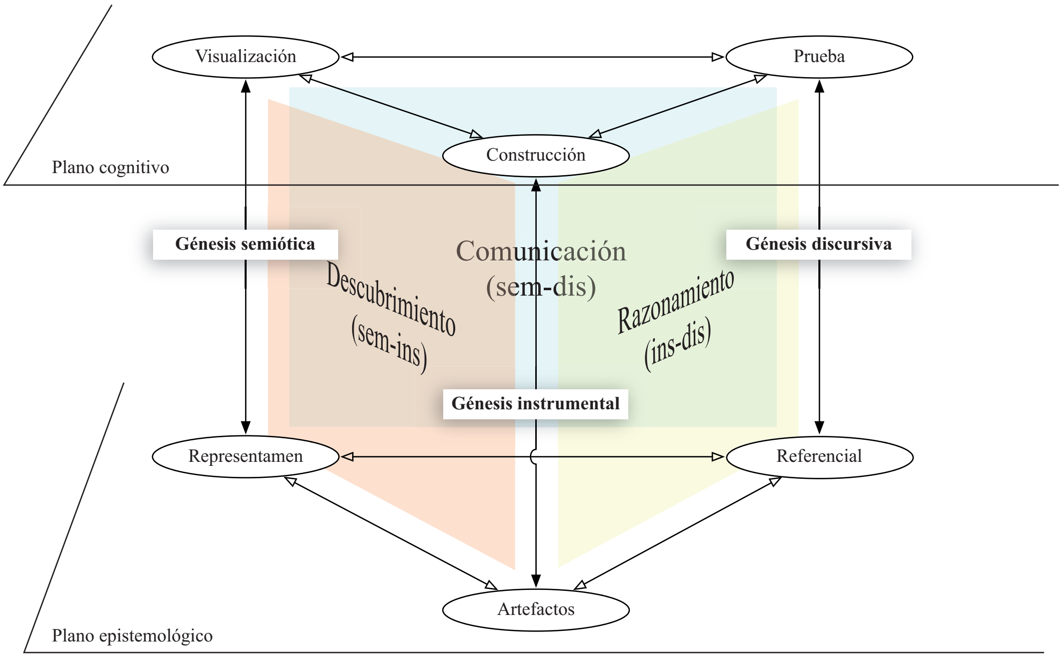


**Figura 3** – Los planos verticales en el ETM

Un primer tipo de interacciones con objeto de desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos privilegia la identificación y la exploración de los objetos apoyándose en las génesis semiótica e instrumental.. Un segundo tipo de interacciones desarrolla el razonamiento matemático, fundado en la justificación de los descubrimientos, articulando las génesis instrumental y discursiva. Finalmente, un último tipo está orientado hacia la comunicación matemática de los resultados y se apoya esencialmente en las génesis semiótica y discursiva. La definición exacta de estos planos de interacciones y la descripción de sus interrelaciones depende del ámbito matemático específico que se haya estudiado.

## 5. Temáticas de esta monografía

El trabajo matemático que aquí se presenta no sólo recoge las contribuciones si no que es expresión de la "cohesión" y del "corazón" de la comunidad científica que ha participado en los simposios.

Sin restringirse a la elaboración de un Espacio de Trabajo Matemático en su sentido técnico, el objetivo de las conferencias elegidas en esta monografía se interrogan ampliamente acerca de las dimensiones semióticas, cognitivas e instrumentales del trabajo matemático, no excluyendo a priori ningún enfoque epistemológico o didáctico. Esta extensión de la problemática al trabajo matemático en un sentido amplio se propuso a los participantes desde los cuatro temas de reflexión especificados en este número.

### Tema 1- El trabajo matemático y los ETM

El objetivo de este tema es, por una parte, profundizar en el modelo teórico definido por los espacios de trabajo matemático y, de otra parte, explorar las utilizaciones que como herramienta de análisis tiene en estudios especificoss. Utilizar este modelo en otros ámbitos distintos al de la Geometría conlleva un estudio particular y específico de los ámbitos en cuestión para ser aplicados al Álgebra, al Análisis, a la Aritmética, entre otros… Para armonizar las notaciones, estos espacios de trabajo específicos, asociados a dominios específicos *D*, se denotaran $ETM_D$, es decir, $ETM_{\text{àlgebra}}$, $ETM_{\text{anàlisis}}$, $ETM_{\text{aritmética}}$, etc.. El espacio de trabajo matemático se puede entender como una red que ponga en relación las diversas fibras que constituyen los ETM$_{\grave{a}}$. La cuestión es saber, entonces, cómo se organizan la red de fibras entre espacios o la superposición de los planos. Estas interacciones entre los dominios especificos son esenciales para comprender el funcionamiento global del trabajo matemático y ellas obligarán, además, a considerar los procesos de modelización en el marco de los ETM, más allá de las puras cuestiones semióticas.

Tema 2 – Ambientes tecnológicos y trabajo matemático

Este temase centra específicamente enla utilización de ambientes tecnológicos y en qué medida afectan el trabajo matemático. De hecho, la aparición contemporánea de numerosos instrumentos ha contribuido a dar un relieve nuevo a los aspectos constructivos y a los artefactos que sostienen la ejecución del trabajo matemático, tanto en el nivel esperado de los alumnos como en el nivel de la investigación actual. Podremos considerar un doble cuestionamiento relativo a su impacto.

– En primer lugar, ¿qué potencialidades ofrecen estos ambientes para transformar el trabajo matemático del alumno? Como consecuencia de la inclusión de diversas génesis, es conveniente ir más allá del enfoque instrumental para responder a esta pregunta.
– La segunda cuestión consiste en estudiar en qué, la utilización de entornos tecnológicos influye en la construcción epistemológica del alumno, guiando su trabajo matemático. Ello puede concernir, a título indicativo, tanto a la naturaleza de los objetos matemáticos que él construye, como a las pruebas matemáticas aceptables, así como su función como medio de investigación.

Para expresar este interrogante en el marco particular de la Geometría en ambientes tecnológicos, Coutat y Richard (2011), propusieron caracterizar los planos verticales del ETG idóneo, apoyándose en la idea de procesos: validación, modelización y descubrimiento (Fig. 4). En lo que concierne a la estructuración del ETM propuesto arriba (Fig. 3), estos procesos constituyen las manifestaciones de las competencias matemáticas del sujeto en el momento de su trabajo geométrico.

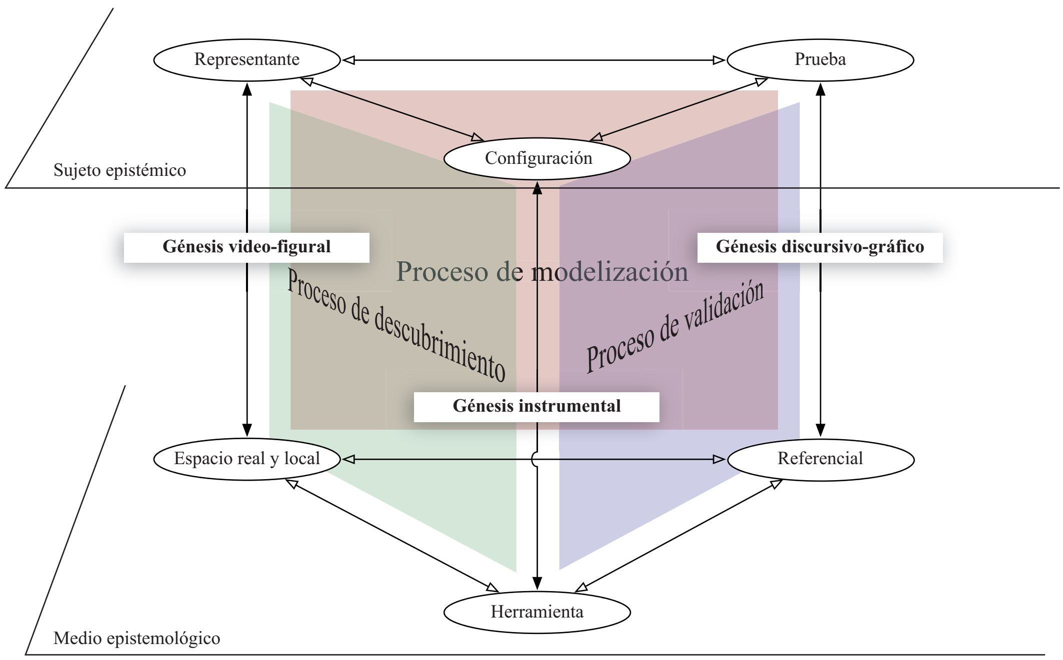

**Figura 4** – Los planos verticales en el ETG idóneo

Tema 3 – El trabajo matemático y los aspectos sociales e institucionales

De manera intrínseca, la cuestión de los contextos es central en la constitución del trabajo matemático. Se puede tratar como un enfoque interno para caracterizar dos facetas del trabajo de investigación del matemático con los contextos de descubrimiento y de justificación. A los contextos precedentes, podemos añadir el contexto de uso de las matemáticas que, con frecuencia, es el contexto principal para los alumnos y los usuarios habituales de las matemáticas, quienes se interesan generalmente en éstas debido a la potencia de sus aplicaciones. De la misma manera, es posible expandir la mirada sobre el trabajo matemático observando el rol de las instituciones particulares en las que este trabajo se inserta, junto al funcionamiento de las interacciones sociales y de lenguaje. El papel de la formación, inicial o continuada, de los profesores de matemáticas aparece ya como una palanca institucional fundamental.

Tema 4 – Visualización y representación en el trabajo matemático

Debido a la variedad de los gráficos utilizados en todas los ámbitos de las matemáticas, la cuestión de la visualización y de su rol en el trabajo matemático se plantea inevitablemente. Si la visualización fue el objeto de numerosos trabajos en geometría, son escasas las investigaciones que abordan la visualización en ámbitos matemáticos, aunque varias publicaciones contemporáneas subrayen su importancia (Guzmán, 1996, Alsina y Nelsen, 2006). Este tema se interesa por los conceptos de flexibilidad, en la génesis de los registros de representación semiótica y, más generalmente, en el lugar de estos registros, en el trabajo matemático, tradicional o instrumentado.

## REFERENCES


Alsina, C. et Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. The Mathematical Association of America.

Coutat, S., Laborde, C. & Richard, P.R. (2013). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics* (18 p).

Coutat, S & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 97-126.

Duval, R. (1995). Why to teach geometry. *Icmi Studies on Geometry* Catania.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, 10,* 5-54.

Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos Básicos del Análisis*. Ediciones Pirámide.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education, vol 6.2. pp 167-188.*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24. El espacio de trabajo matemático y sus génesis, traducción J. Lezama, Cicata.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2011). How do Teachers' Approaches on Geometrical Work relate to Geometry Students Learning Difficulties? *Educational studies in Mathematics.77/1.* 129-147

Kuzniak, A. (2012) Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. *In Rezat (ed) Transformation – A fundamental idea of Mathematics Education . Springer.*

Richard, P.R. (2004). L'inférence figurale: Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational studies in Mathematics, 57(2),* 229-263.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society. 30(2).* 161-177.