

# Paradigmas geométricos y espacios de trabajo geométrico

## Espacios de trabajo matemático

Alain Kuzniak

Laboratoire de Didactique André Revuz  
Universidad Paris Diderot  
France

Valparaiso Noviembre 2013

¿Por qué enseñar y aprender las matemáticas hoy?

Trabajo geométrico y matemático

Noción de Espacio de Trabajo Geométrico

Espacio de Trabajo Matemático

Los paradigmas geométricos

Varios ETM y como investigarlos

Algunas perspectivas

## La pregunta siempre nueva sobre la utilidad de las matemáticas y de su aprendizaje

### Un ensayo de Arbuthnot en 1701

1. Para desarrollar la Mente y el Razonamiento  
“Truth is the same thing to the Understanding as Music to the Ear and Beauty to the Eye”
2. Para las aplicaciones en una gran diversidad de campos  
(Comercio, Navegación, arte de la guerra ...)
3. Para saber cómo llegar a los resultados y no sólo los resultados.  
Una método para liberar la mente de la superstición.

## À bas Euclide – Bajo Euclides ?

### Algunos puntos de vista conflictivos

1. Las matemáticas modernas: el eslogan provocador de Dieudonné presta atención a la distancia existente entre la geometría tradicional basada sobre el triángulo y la geometría contemporánea.
2. Contrarreforma: Bajo Euclides que no da la real ruta a las aplicaciones y al uso de la geometría en el mundo real.
3. Euclides como el primer didáctico ...

## Desarrollar la enseñanza de las matemáticas y las investigaciones en didáctica

### En un contexto específico

1. Una tensión entre visiones utilitarista e idealista
2. Utilizar las nuevas herramientas que cambian los métodos para descubrir y probar
3. “Hacia una nueva alfabetización matemática” que revisa las relaciones de los ciudadanos con la la verdad y la prueba

## La finalidad de nuestros investigaciones inicialmente en geometria

### Tres direcciones distintas

1. Elaborar un marco teórico para estudiar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la escolaridad obligatoria y también en la formación de los profesores.
2. Permitir comparar la enseñanza de la Geometría en diferentes instituciones o países.
3. Centrado en el “trabajo matemático” visto como central.

## El trabajo matemático como tema crucial de estudio

### Punto de vista de Freudenthal

¿Qué es la matemática? Por supuesto, usted sabe que la matemática es una actividad ya que son matemáticos activos. Es una actividad de resolución de problemas, de buscar problemas, pero también es una actividad de organización de un dominio. ESM 3 - 1971

### Trabajo matemático y actividad: Habermas

Por trabajo o actividad racional con respecto a un fin, entiendo una actividad instrumental, o la elección racional, o bien una combinación de ambos.

### Freudenthal ESM 3 1971

Una gran parte de la actividad matemática consiste hoy en la reorganización del contenido. Es un buen hábito, y es un mal. Es un mal hábito porque congelamos el resultado de nuestra actividad en un sistema rígido, ya que este es el objetivo, porque es racional, y porque es hermoso, y esto es lo que enseñamos.

# Trabajo geométrico y matemático

## La naturaleza de este trabajo

1. En un contexto de descubrimiento : intuición, experimentación..
2. En un contexto de justificación : probar, demostrar
3. En un contexto de comunicación : comprender, explicar, presentar...



## La noción de Espacio de Trabajo Geométrico

Un espacio de trabajo geométrico (ETG) es un espacio organizado para favorecer el funcionamiento del trabajo geométrico (en un contexto educativo).

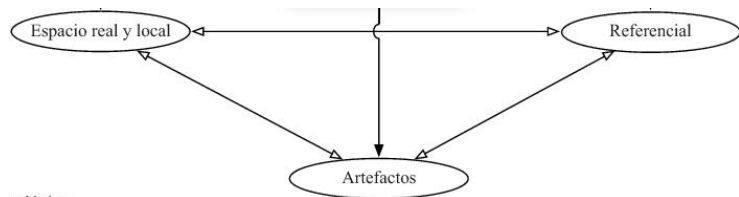
Basado en dos dimensiones

- ▶ Un nivel epistemológico
- ▶ Un nivel cognitivo

## El nivel epistemológico

### Tres componentes

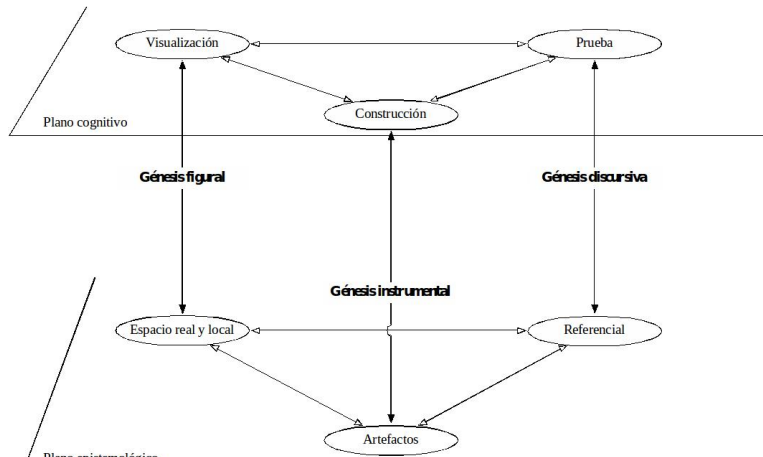
- ▶ El espacio como soporte material y objetos tangible
- ▶ Artefactos : compas, reglas, software...
- ▶ Un sistema de definiciones y propiedades : le référentiel



## El nivel cognitivo

- ▶ Un proceso de visualización en relación con el espacio y el soporte material
- ▶ Un proceso de construcción determinado por los instrumentos
- ▶ Un proceso discursivo que produce razonamiento y prueba.

¿Cómo organizar cada nivel?  
¿Cómo articular ambos niveles?  
Lo que guía el trabajo?

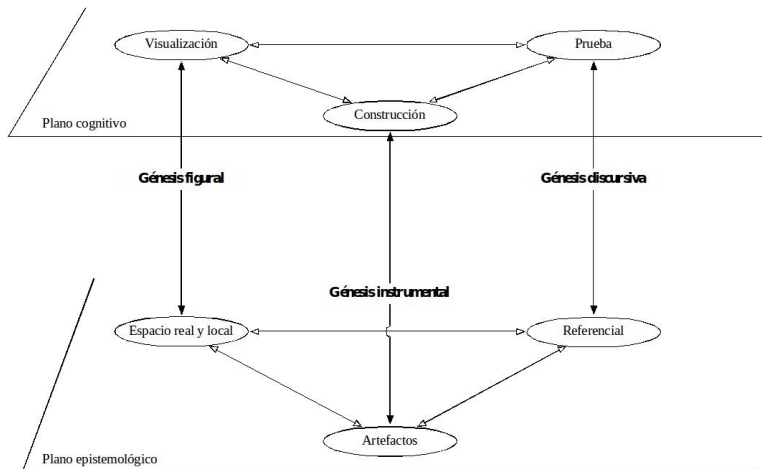


## Varios geneses

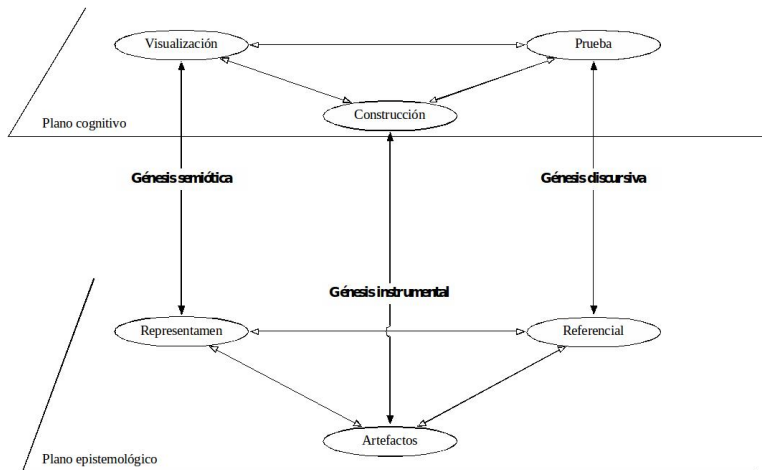
Ambos niveles, cognitivo y epistemológico, tienen que ser articulados con el fin de garantizar un enfoque coherente y completo del trabajo geométrico. Este proceso supone algunas transformaciones que es posible identificar a través de tres fundamental génesis relacionados con nuestro diagrama:

- ▶ Un génesis instrumental que transforma los artefactos en herramientas dentro del proceso de construcción.
- ▶ Un figural y semiótica génesis que proporciona lo tangible objetos con su funcionamiento como objetos matemáticos.
- ▶ Una génesis discursiva de la prueba que da sentido a las propiedades utilizadas dentro del razonamiento matemático.

# Un punto de vista global sobre el Espacio de Trabajo Geométrico

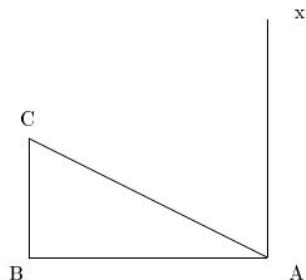


## Extender la noción : Espacio de Trabajo Matemático



## Los paradigmas geométricos

### En busca de los paradigmas



Dado el triángulo  $ABC$  rectángulo en  $B$  tal que  $AB = 4\text{ cm}$  y  $BC = 2\text{ cm}$ . La semi-recta  $[Ax)$  es perpendicular a la recta  $(AB)$ .  $M$  es un punto de la semi-recta  $[Ax)$ . ¿ Existe un punto  $M$  tal que el triángulo  $ACM$  sea equilátero? Justifique.



## Los paradigmas geométricos

### Variación del estado epistémico: como validar

Es imposible. Esto puede explicarse por el hecho de que en un triángulo equilátero, los ángulos son iguales y su suma vale  $180^\circ$ .

Cada uno vale  $60^\circ$ . En este caso cuando se mide gracias a un transportador, observamos que  $\widehat{CAM}$  es superior a  $60^\circ$ ,  
 $\widehat{CAM} = 64^\circ$ .

## El ejemplo pone de relieve dos puntos principales

- ▶ Existen diferentes puntos de vista sobre la geometría elemental, lo que puede resultar en soluciones divergentes por el mismo problema
- ▶ Algunos de los términos (como la construcción) pueden asumir diferentes significados en función de los profesores y de los estudiantes puntos de vista sobre la misma cuestión

La noción de paradigma geométrico será útil para resumir estos diferentes puntos de vista dentro el marco de los ETG.  
CERME3 : Houdement y Kuzniak

## La noción de paradigma según Kuhn

### Dos facetas de la noción de paradigma

1. La palabra paradigma, en su aspecto global, designa el conjunto de las creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico.  
Fija la manera correcta de plantear y de emprender la resolución de un problema.
2. En el segundo sentido, interesando en una perspectiva de enseñanza, Kuhn caracteriza los ejemplos significativos y comunes que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, a aislar y a distinguir las diferentes entidades constitutivas del paradigma global.

## El desafío didáctico

- ▶ En la enseñanza, paradigmas diferentes son englobados en la palabra única *geometría*. Estos paradigmas explican en parte la ruptura que existe entre los diferentes niveles institucionales educativos
- ▶ Los profesores y alumnos implícitamente están colocados en paradigmas separados: esta diferencia de posición epistemológica explica ciertos malentendidos didácticos.

## Las tres geometrías elementales

### La Geometría I Geometría Natural

La geometría sobre los objetos reales y confusión con la realidad

### La Geometría II G. axiomática natural

La geometría como el esquema de la realidad

### La Geometría III G. axiomática formal

Independencia de la geometría y de la realidad.

## La Geometría I

- ▶ Una geometría estrechamente implicada en el mundo real
- ▶ La fuente de la validación es el mundo real y sensible
- ▶ El juego de ir y volver entre el modelo y la realidad es permanente
- ▶ Importancia de la aproximación y de la medida

## La Geometría II axiomática natural

- ▶ Es edificada sobre un modelo próximo de la realidad y de la intuición espacial.
- ▶ Pero, cuando los axiomas están enunciados, las demostraciones deben ser hechas dentro el sistema de axiomas par ser validas y ser acertadas. El razonamiento sobre los esquemas de la realidad
- ▶ La axiomatización como un horizonte. El sistema de axioma puedo ser incompleto.

## La Geometría III o la preeminencia de la axiomática y de la lógica

- ▶ El problema de tener una axiomática coherente y completa.
- ▶ La organización axiomática y temática.
- ▶ La separación entre la verdad y la certeza. El cordón umbilical esta cortado entre la realidad y la axiomática : los axiomas no están mas basados en lo sensible. El sistema de axiomas puede no tener alguna relación con la realidad lo que Wittgenstein ilustra con la afirmación : “los axiomas de una geometría pueden contener ninguna verdad”.



## Los paradigmas geométricos

Estas geometrías no son jerarquizadas. El horizonte de trabajo es diferente:

Geometría I Técnico y práctico

Géométrie II Axiomático y modelizante

Géométrie III Lógico y formal

## Diversidad de los espacios de trabajo geométrico - matemático

**ETM de referencia** La organización esperada de este espacio de trabajo es definido de manera ideal solamente sobre la base de criterios matemáticos.

**ETM Personal** El ETM idóneo debe ser utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. Cada uno se apropia y lo ocupa con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. Este ETM es lo que llamamos un ETM personal.

**ETM idóneo** El ETM de referencia debe ser acondicionado y organizado para volverse un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución dada con una función definida.

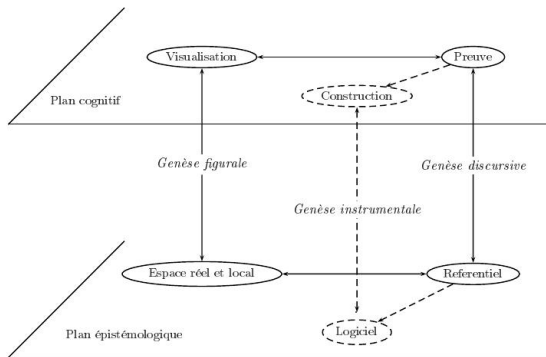
## Los Espacios de Trabajo Geométrico - Matemático: como estudiarlos

**ETG de referencia** Tratados, Curriculum para conocer la  
vigilancia epistemológico.

**ETG Personal** Concepciones, conocimiento de los profesores  
y alumnos : la vigilancia cognitiva.

**ETG idóneo** Curriculum, textos, clase reales : la vigilancia  
didáctica

## Los Espacios de Trabajo Geométrico : ver el trabajo



## ETG idóneo de hoy en Francia en 2011 al fin de la escolaridad obligatoria

En los textos escolares del 2002, la situación típica consiste en :

1. Construir con instrumentos geométricos figuras particulares con lápiz y papel.
2. Medir sobre estas figuras con instrumentos
3. Hacer la conjetura de una propiedad
4. Institucionalizar la propiedad con una demostración o como una propiedad admitida

## ETG idóneo de hoy

### Un extracto del texto *Triangle 4<sup>e</sup> 2002 Septimo.*

#### 3. À la découverte du cosinus d'un angle

➤ exercices 3 et 4 p. 211

**a/** Tracer trois triangles rectangles de mesures différentes dont un des angles mesure  $50^\circ$ . Pour chacun de ces triangles prendre les mesures nécessaires pour calculer le quotient :

$$\frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle de } 50^\circ}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

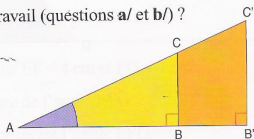
Quelle remarque peut-on faire ?

**b/** Recommencer le travail précédent avec trois autres triangles rectangles dont un des angles mesure  $30^\circ$ .

**c/** Quelle conjecture peut-on faire, suite à ce travail (questions **a/** et **b/**) ?

**d/** Démonstrons cette conjecture : on considère les deux triangles rectangles  $ABC$  et  $AB'C'$  ci-contre.

Démontrer que  $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$ .



## ETG idóneo de hoy

En los nuevos textos (2006), una tendencia emerge; la introducción de una nueva noción se hace por el uso de un software de geometría.

La situación típica consiste en:

1. Construir una figura particular con la ayuda de un software de geometría
2. Desplazar la figura con el fin de comprobar la propiedad.
3. Institucionalizar la propiedad como una propiedad admitida gracias a una experiencia

# ETG idóneo de hoy

## Un extracto del texto *Phase 4<sup>e</sup> 2006*.

### 1 J'utilise un logiciel de géométrie pour conjecturer

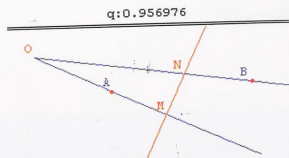
#### ■ A : Réalisation de la figure

- Placer trois points  $O$ ,  $A$  et  $B$  non alignés.  
Tracer les demi-droites  $[OA)$  et  $[OB)$ .  
Placer un point  $M$  sur la demi-droite  $[OA)$ .  
Tracer la droite passant par le point  $M$  et perpendiculaire à la droite  $(OA)$ .  
Cette droite coupe la demi-droite  $[OB)$  au point  $N$ .

- Mesurer  $OM$  et  $ON$ .  
Afficher le résultat de  $\frac{OM}{ON}$ .

#### ■ B : Conjecture

- Déplacer le point  $M$ . Que peut-on remarquer concernant le quotient  $\frac{OM}{ON}$  ?
- Faire varier l'angle  $\widehat{MON}$  en déplaçant le point  $B$ . Le quotient  $\frac{OM}{ON}$  varie-t-il ?
- Recopier et compléter la phrase suivante :  
« Dans le triangle  $OMN$  ... en  $M$ , le ...  $\frac{OM}{ON}$  semble ne dépendre que de ...  $\widehat{MON}$ . »





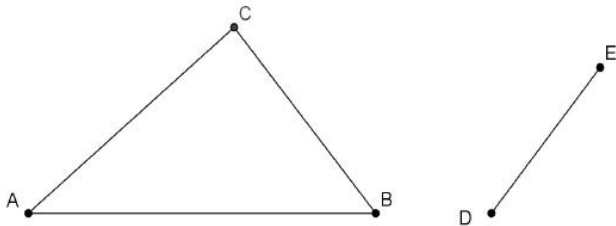
## Algunas características

1. Práctica de la abducción sobre las definiciones y las propiedades
2. Utilización de la medida y de un software
3. Sucesión de propiedades no necesariamente vinculadas. Islas de razonamiento.
4. Los casos límites dejados de lado.

## Semejanza de triángulo en el aula Grade 10

Construir un triángulo de tal manera que  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  and  $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

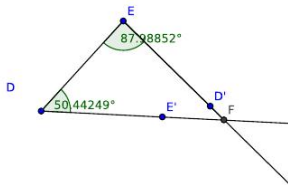
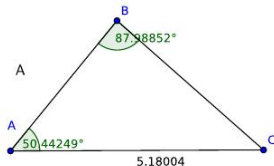
Partie I : Créer un triangle DEF tel que  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  ,  $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$  .



- ▶ Que podemos decir sobre  $\widehat{ACB}$  y  $\widehat{DFE}$
- ▶ Con la regla, comparar los lados de los triángulos; Que pueden observar?
- ▶ Completar el texto : Podemons hacer la conjetura que si dos triángulos tienen ... entonces sus lados son ...

## Semejanza de triangulo en el aula Con un software

Construir un triangulo de tal manera que  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  and  
 $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$



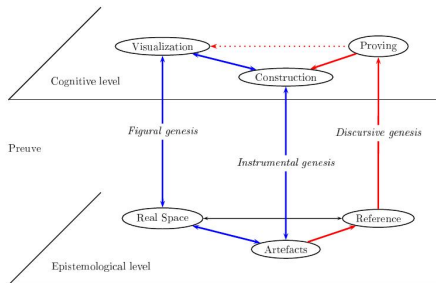
## El malentendido global o Cuando la demostración es la demostración

- ▶ Docente: Hemos demostrado la propiedad?
- ▶ Alumnos : Si, lo hicimos una demostración
- ▶ Docente: No, es demasiado impreciso

## La ruptura entre dos enfoques de la geometría

### Para el docente

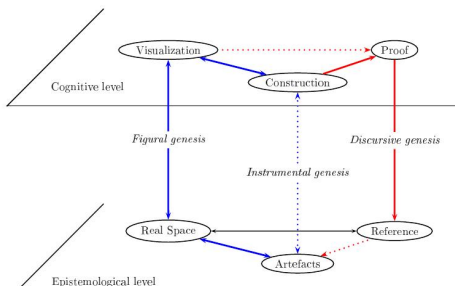
- ▶ La construcción es simple y no va a causar problemas
- ▶ Motivar a la entrada en Geometry II con un primer trabajo en Geometría I: para motivar la prueba formal
- ▶ Un dibujo visto como una figura genérica



# Una ruptura con el ETG personal de los estudiantes

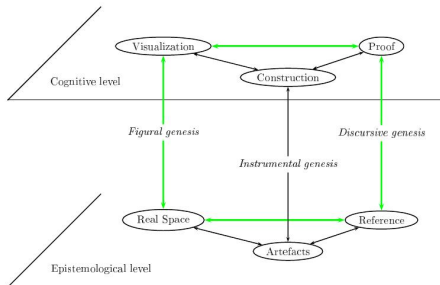
Para ellos

- ▶ Para construir con herramientas es complejo y necesita un largo tiempo
- ▶ Debido a la diversidad de los resultados, una gran diversidad de propiedades son elaboradas por los alumnos
- ▶ Una figura particular sin generalización soporte del trabajo



## Malentendido y contrato didáctico

- ▶ El trabajo de construcción realizado por los estudiantes es ignorado por el profesor
- ▶ El software como fuente de la Verdad
- ▶ La conjetura como base del acuerdo entre todos.
- ▶ Prueba experimental y prueba basada sobre axiomas



## Algunas perspectivas en Geometría

- ▶ Construir un ETG coherente y global en función de la institución
- ▶ Hacia una rica Geometría I con un ETG bien estructurado en torno a (GI / GI I) con un trabajo sobre la aproximación
  - ▶ Ayudar los docentes a comprender las dificultades de los alumnos
- ▶ Pensar más allá de la geometría para llegar a una verdadera cultura geométrica



## Investigaciones en relación con los ETM

- ▶ Estudio de los ETM en los otros dominios(en matemáticas):  $ETM_{Dominio}$ 
  - ▶ Geometría y números: los números reales y complejos y geometrización.
  - ▶ Problema de modelización basada sobre situaciones geométricas con el uso de software -> Analisis, funciones y pruebas ...
- ▶ Desarrollo del marco teórico.
  - ▶ Comprender y definir las diversas génesis.
  - ▶ Articulación de los dominios y registros en los Espacios de Trabajo Matemático

Gracias