TD « Espace de Travail Mathématique »[1]

Charlotte Derouet[*], Alain Kuzniak[*], Elizabeth Montoya Delgadillo[**], Rosa Elvira Páez Murillo[***], Sophie Rousse[*], Fabrice Vandebrouck[*], Paula Verdugo[**] & Laurent Vivier[*]

[***]Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Mexique
[**]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili
[*]Laboratoire de Didactique André Revuz–Université Paris Diderot, France

INTRODUCTION

Nous rendons compte ici du TD associé au cours « Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction ». L'objectif du cours était de présenter le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) pour le thème de l'analyse, les avancées de ce modèle. Le modèle des Espaces de Travail Mathématique, conçus comme des espaces de circulation entre les pôles dans les plans épistémologique et cognitif, est un outil d'analyse (tant a priori qu'a posteriori), de description de tâches et d'interprétation des activités. Le TD s'est appuyé sur une analyse de corpus de façon à dégager les différents types d'interactions et la nature des trois genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) associées ainsi que les paradigmes identifiés dans ce modèle. De cette façon, il est possible d'identifier des ruptures, des fausses continuités, de repérer des malentendus et des blocages. Le TD est organisé en trois parties pour mettre en évidence une progression dans l'utilisation des ETM :

- TD 1 : Présentation des composantes du modèle ; introduction de la fonction exponentielle au secondaire.
  Ce premier TD, présenté avant le cours, a permis d'introduire les différentes composantes de l'ETM qui apparaissent dans le travail mathématique. L'intérêt du modèle des ETM comme un filtre pour l'analyse du travail mathématique est mis en évidence, chaque composante apparaissant comme un élément important à prendre en compte.
  Du point de vue du contenu mathématique, l'accent porte sur le jeu entre discret et continu qui est une des caractéristiques constitutives de l'analyse. Nous nous focalisons sur les classes de terminales ES (Économique et Sociale) et S (Scientifique) en France où, à travers l'introduction des fonctions exponentielles, la dialectique entre le jeu discret et le continu apparaît de manière cruciale.
- TD 2 : Utilisation du modèle et circulation des savoirs ; la fonction de densité en fin de secondaire.
  Cette deuxième séance a eu lieu après le cours et elle avait pour objectif principal de revenir sur le diagramme des ETM et d'en montrer les usages possibles sur un extrait d'une séance d'enseignement. La transcription proposée aux participants portait sur la notion de fonction de densité de probabilités en terminale scientifique en France. Elle a permis de proposer un découpage de la séance basé sur les changements dans la circulation du travail mathématique à travers le diagramme.
- TD 3 : Paradigmes et perspectives de localité ; le cas de la tangente.

[1] Travail supporté par le projet ECOS-Sud C13H03 et, pour le TD 3, par le projet PI 2014-39 de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México et la Secretaria de Ciencia, Tecnología e Innovación (SECITI) au Mexique.

> Dans cette dernière séance, nous proposons, à travers l'objet tangente, un développement du modèle des ETM avec les perspectives de localité : locale, globale et ponctuelle. Cela nous a permis de traiter un autre jeu caractéristique de l'analyse, la dialectique local/global.

Nous ne rappelons pas ici le modèle des ETM et nous renvoyons au cours associé pour une présentation des trois paradigmes de l'analyse (Analyse arithmético-géométrique AG, Analyse Calculatoire AC, Analyse Infinitésimale AI), les composantes du diagramme des ETM ainsi que les trois perspectives (locale, globale, ponctuelle).

L'INTRODUCTION DE LA FONCTION EXPONENTIELLE AU SECONDAIRE

Cette section a pour objectif de présenter les différentes composantes de l'ETM qui apparaissent dans le travail mathématique. On pointe l'intérêt du modèle des ETM comme un filtre pour l'analyse du travail mathématique, chaque composante apparaissant comme un élément important à prendre en compte.

Du point de vue du contenu mathématique, on s'intéresse au jeu entre discret et continu qui est une des caractéristiques constitutives de l'analyse. Nous prenons le cas de l'introduction des fonctions exponentielles, en Terminales S et ES (notées respectivement TS et TES) où le jeu discret/continu est essentiel – essentiel pour cette introduction et plus généralement pour l'analyse. Les introductions dans les deux classes présentent des différences significatives, et il est à noter que l'approche au Chili est très proche de la classe de Terminale ES(voir annexe 1).

Du point de vue méthodologique, nous dégageons des sources de malentendus potentiels, des difficultés qui peuvent émerger en classe puis nous proposons des extraits de vidéos sur des exercices proches de ceux proposés dans les manuels.

On trouvera en annexe 1 les extraits des programmes ainsi qu'en annexe 2, les extraits de manuels étudiés.

1. En Terminale Économique et Sociale en France

Dans les programmes

Les fonctions exponentielles de base *a* sont introduites en TES (programmes français de 2009) comme des extensions continues des suites géométriques de raison *a*. Du point de vue mathématique, il s'agit d'une extension avec accident au sens de Robert (2008), liée au passage du discret au continu. Cependant, on peut penser que les élèves au niveau de la classe de terminale ES n'ont pas assez de connaissances (***référentiel***) théoriques sur les réels[2] pour qu'il soit facile de leur faire relever cet accident. Les manuels et le professeur doivent donc faire émerger cet accident en jouant sur les différentes représentations et les différents artefacts utilisés.

Dans les manuels

Nous notons (H) le manuel *Hyperbole* et (T) le manuel *Transmath*.

Du côté des représentations algébriques (***representamen***), dans les deux manuels, on utilise la variable *n* pour les entiers et la variable *x* ou *t* pour les réels, avec l'implicite récurrent dans l'enseignement qui est que la variable *n* est à valeurs entières et les variables *x* ou *t* sont à valeurs réelles, *t* désignant souvent la variable temps. Toutefois les deux manuels contrastent

---

[2] On peut penser d'ailleurs que c'est le cas de tous les lycéens vu que le secondaire ne propose pratiquement plus aucun travail sur les nombres réels (Vergnac et Durand-Guerrier, 2014).

sensiblement. En effet le manuel (T) semble moins mettre en évidence l'accident entre les suites géométriques et les fonctions exponentielles que le manuel (H). Dans (T), on passe à partir des deux exemples $0{,}85^n$ et $1{,}2^n$ de la représentation a^n à la représentation a^x en indiquant simplement que ce sont des fonctions. Dans (H), on enrichit artificiellement ce passage en introduisant la notation $v(t)$ pour une fonction continue, les notations $v(n)$ *et* $U_n = v(n)$ pour sa restriction aux valeurs entières. On fait référence explicitement à la notation U_n qui ne sert pas mathématiquement mais permet sans doute de renforcer l'aspect discret de la variable n et le fait que $v(n)$ est une suite numérique.

Du côté des représentations graphiques en jeu, dans (T), on fait un prolongement direct du graphe discret de la représentation (n, a^n) en y ayant rajouté trois points d'abscisses entières négatives. Le manuel stipule simplement que le prolongement se fait alors de façon « continue » et « régulière ». Mais les élèves ont déjà des habitudes à relier de façon continue des graphiques de points isolés, notamment en physique, sans que soit questionné ce prolongement du discret au continu. Dans (H), on met en évidence sur le graphe continu de la fonction v des points à coordonnées entières. Ils sont mis en relation avec une suite géométrique de raison 1,21. A partir de cette suite, on travaille sur des valeurs rationnelles de la variable t. Il y a donc un aller-retour plus riche entre continu – discret – continu.

Des différences apparaissent également au niveau des outils numériques mobilisés dans les deux manuels (***artefact***). Il n'y a pas de référence à des outils technologiques dans le manuel (T) alors qu'il y a des références au tableur, à Géogébra et à la calculatrice graphique dans (H). Il y a un changement d'outil organisé par le scénario de (H). Le tableur sert à trouver les valeurs de $v(t)$ pour des valeurs entières ou rationnelles de la variable t. La calculatrice graphique ou Géogébra sont mobilisés pour visualiser le graphe de $1{,}21^x$ et de différentes fonctions q^x. Ici l'implicite récurrent est que le tableur travaille sur des valeurs isolées alors que la calculatrice graphique ou le logiciel Géogébra trace des graphes de fonctions continues. Cela permet de matérialiser l'accident entre les suites géométriques dont on trouve les valeurs avec le tableur et les fonctions exponentielles que l'on trace à la calculatrice ou avec Géogébra.

La calculatrice n'est pas utilisée dans ses aspects numériques pour calculer des valeurs de la suite ou de la fonction. En effet, de ce point de vue, la séquence de touches à implémenter pour calculer des valeurs de $1{,}21^x$ ou $1{,}21^n$ est la même que la variable soit entière, décimale ou réelle (avec $x=\pi$ ou $x=e$ notamment), ce qui pourrait conforter les élèves dans le fait que l'extension se fait sans accident. Ainsi, on peut penser qu'il n'y aura pas de difficulté pour les élèves, mais qu'un malentendu peut s'installer avec l'enseignant. De ce fait, du côté de l'enseignant, on peut s'attendre à des difficultés à faire comprendre cet accident qui est directement lié au passage du discret au continu.

C'est d'ailleurs ce qui se passe dans l'extrait de vidéo qui est utilisé.

Dans une classe

Le manuel utilisé est (H) et la séquence filmée en classe est relative à l'activité d'introduction (voir annexe 3). Le professeur introduit donc la fonction exponentielle de base 1,21 en utilisant le scénario du manuel (H). Alors que les représentations algébriques sont les mêmes hormis le passage de n à x (à savoir $1{,}21^n$ et $1{,}21^x$), le changement de logiciel (passage d'un travail sur le tableur au tracé de la courbe sur Géogébra) sert à marquer l'accident entre la suite et la fonction. Mais la séquence à implémenter dans la barre de saisie de Géogébra est « f(x)=1,21^x », la même que les élèves peuvent implémenter sur leur calculatrice pour tracer la courbe mais aussi très proche de la séquence à utiliser pour trouver des valeurs numériques. On retrouve le fait qu'il n'y a pas d'accident du point de vue des représentations algébriques et de leurs implémentations sur la calculatrice ou sur Géogébra. Ceci fait dire à l'une des élèves « *on a fait tout ça pour ça* ? (… alors qu'il suffit juste de changer un nombre entier par

x) ». Le professeur demande alors à l'élève si $1{,}21^{\pi}$ ne lui aurait pas posé de problème… mais la réponse de l'élève est négative ! En effet l'implémentation numérique sur la calculatrice est la même.

Il n'y a pas de difficulté pour les élèves, mais des difficultés pour l'enseignant à faire comprendre l'accident, sans doute par manque d'appui possible sur des connaissances sur les nombres réels. Le travail est entièrement sémiotique et instrumental (plan [Sem-Ins]) alors que l'accident ne peut être perçu qu'avec des connaissances théoriques sur les nombres réels (référentiel théorique non suffisamment constitué).

2. En Terminale Scientifique en France

Dans les programmes

En terminale S, la fonction exponentielle est définie comme l'*unique fonction dérivable égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0*. Ce nouvel objet, la fonction exp, est ainsi introduit comme une réponse à un problème (RAP, selon Robert). L'existence étant admise (l'unicité est démontrée), ce nouvel objet n'est pas à construire. Toutefois, l'enseignement actuel propose de manière usuelle des phases introductives où les notions sont, au moins en partie, construites. On peut s'attendre à des activités pour motiver l'équation différentielle $f'=f$ (la notion d'équation différentielle est hors programme) et à des activités d'approche de la fonction exponentielle (éventuellement avec la méthode d'Euler qui était au programme précédent).

Dans les manuels

Nous notons (R) le manuel *Repères* et (T) le manuel *Transmath*.

La motivation est historique dans (R) avec une présentation de L. Euler avant de développer la méthode d'Euler. Dans (T), on compare (essentiellement par juxtaposition) le discret et le continu dans un contexte populationnel avant de proposer une situation intra-mathématique sur le thème de la sous-tangente.

On retrouve la même organisation des variables qu'en terminale ES, notamment entre discret et continu, et des outils : pour le discret, variable n, tableur et calculatrice, et pour le continu, variable x et Géogébra. On a par exemple dans (T) des représentations du type $a_n=7\times1{,}012^{10n}$ pour les suites et $f(x)=7\times1{,}012^{10x}$ pour les fonctions avant de faire une comparaison graphique (coïncidence sur les abscisses entières) avec la calculatrice. Le tableur est utilisé dans (R) pour obtenir des représentations d'une solution de $f'=f$ dans d'autres registres (table de valeurs, graphique) en utilisant la méthode d'Euler.

Une différence notable avec la TES concerne le jeu entre discret et continu :

- dans (R) on part de l'équation différentielle $f'=f$ pour obtenir une représentation graphique discrète par la méthode d'Euler avec pour objectif d'obtenir la courbe continue : continu→discret→continu.
- dans (T), on s'appuie sur les droites (A_nA_{n+1}), A_n étant de de coordonnées $(n,2^n)$, pour avoir une « sous-tangente » égale à 1 (conjecture avec Géogébra) avant de passer au continu pour les courbes où une sous-tangente égale à 1 implique $f'=f$: discret→continu.

Mais le travail proposé dans ces manuels de TS, s'il est plus ambitieux que dans ceux de TES, demande une plus grande maîtrise des connaissances en jeu. En effet, il n'est plus uniquement question d'un malentendu entre enseignant et élèves, ces derniers pouvant ne pas voir le problème et ainsi ne pas avoir de difficulté.

Dans (T), et contrairement aux apparences, la généralisation du discret au continu ne porte pas sur les mêmes objets : de droites passant par deux points successifs de la courbe d'une suite aux tangentes à une courbe continue – à moins de penser à la tangente comme la droite passant par les points d'abscisse x et $x+dx$. Cela dit, du point de vue des représentations graphiques, une courbe apparaît sur Géogébra comme enveloppe des droites (A_nA_{n+1}). Finalement, le travail est principalement dans le plan [Sem-Ins] et n'est pas consistant du point de vue des objets en jeu.

Dans (R), la méthode d'Euler est incomplète dans la version proposée car il manque une approximation après la première itération (et les suivantes) : considérer le point (x_1,y_1) comme étant sur la courbe de la fonction cherchée et donc avoir $y_1=f(x_1)$ et avoir ainsi $f'(x_1)$ afin de continuer la méthode. Il y a donc une double approximation : de la courbe par sa tangente pour avoir une valeur approchée que l'on va considérer encore sur la courbe (en fait, on change de solution à l'équation différentielle).

Ainsi, on peut s'attendre à des difficultés pour l'enseignant, le travail proposé demandant une maîtrise de connaissances mathématiques peu mobilisées dans le secondaire. Du côté des élèves, ils auront vraisemblablement des difficultés à mener à bien le travail envisagé et à percevoir les enjeux de ce travail.

Dans une classe

L'enseignant est celui de la vidéo de la classe de TES dont il a été question précédemment, l'année précédente. Il n'utilise pas de manuel, mais l'introduction est proche de celles proposées dans les deux manuels : il propose une introduction historique, directement en cherchant une courbe (continue) ayant la propriété de sous-tangente constante égale à 1 afin d'aboutir à l'équation différentielle, comme dans la manuel (T) mais sans le problème des objets en jeu dans le passage du discret au continu – de ce fait, ici, le travail est dans le continu. Puis, il utilise la méthode d'Euler afin d'avoir au tableur une idée de la courbe de la fonction cherchée qu'il fait également tracer sur Géogébra. Ainsi, la distinction des variables et outils entre discret et continu est similaire à celle des manuels.

En revanche, comme on peut s'y attendre, l'enseignant donne beaucoup d'explications pour que les élèves comprennent la méthode d'Euler et notamment pour le problème de l'approximation (on trouvera en annexe 4 des extraits du discours de l'enseignant). Toutefois, on remarque que les explications restent orales, sans appui sur un travail dans un registre algébrique plus formel alors que ce serait possible avec les outils du secondaire, de discuter des approximations faites avec un travail dans le paradigme AI.

3. Conclusion

On perçoit donc ici par cette analyse les difficultés à installer l'espace de travail de(s) la (les) fonction(s) exponentielle(s), que ce soit en TES ou en TS. Du point de vue théorique, l'introduction de ces fonctions nécessite un passage du discret vers le continu, ce qui est un accident mathématique majeur, caractéristique de l'analyse au lycée.

En TES, on peut penser que c'est la source de malentendu pour les élèves car les représentations que l'on mobilise ne font pas apparaitre l'accident. Qui plus est, le fait de relier continument des graphes de points isolés est une pratique habituelle des élèves, en physique, mais aussi en mathématique : dès le collège, quand les graphes de situations de proportionnalité – discrètes – sont prolongés en des graphes de fonctions linéaires sans beaucoup de problématisation. Les accidents sont mis en évidence par les changements de logiciels qu'opèrent les manuels et l'enseignant. Mais la séquence à implémenter sur chacun des logiciels (tableur, Géogébra ou calculatrice) est plus ou moins la même, que la variable soit discrète ou continue. Cela ne suffit donc pas à faire prendre conscience aux élèves de la difficulté de cette extension.

Une alternative à cette introduction comme extension est d'introduire la fonction exponentielle (ou peut-être les fonctions exponentielles) comme réponse à un problème (Robert, 2008). C'est le scénario qui est préconisé en Terminale S (TS). Mais alors, d'autres difficultés apparaissent à cause du rôle crucial des connaissances mathématiques en jeu, notamment des connaissances sur les nombres réels, avec l'approximation.

En TS, et contrairement à la classe de TES, on construit vraiment un objet, on cherche une fonction, c'est sans doute clair pour les élèves, on est dans le monde du continu. La méthode de recherche est très particulière pour les élèves (unique dans le secondaire) : on a une fonction (dérivable) que l'on va chercher à identifier par discrétisation du continu puis en revenant au continu par une convergence (d'une suite de fonctions, voire de courbes). Il est à noter que, sur un exemple, c'est la preuve du théorème de Cauchy pour les équations différentielles qui est en arrière plan.

Cela dit, malgré les questions fondamentales de l'analyse qui sont soulevées dans cette introduction en TS, pendant deux séances, la suite du cours (le chapitre s'étale sur une dizaine de séances) ne revient pas sur ces aspects de l'analyse, il n'y a plus de jeu explicite entre discret et continu. Le travail est essentiellement calculatoire et algébrique, ce que nous appelons le paradigme AC. C'est aussi le cas dans le chapitre sur les fonctions exponentielles en terminale ES, où mise à part l'activité d'introduction, le travail se situe dans le paradigme AC.

LA FONCTION DE DENSITÉ EN FIN DE SECONDAIRE

Cette deuxième séance du TD a eu lieu après le cours et elle avait pour objectif principal de revenir sur le diagramme des ETM et d'en montrer les usages possibles. A partir d'un extrait d'une séance d'enseignement, nous décrivons la circulation du travail entre les différentes composantes et entre les différentes dimensions de l'ETM. La transcription proposée aux participants portait sur la notion de fonction de densité de probabilités en Terminale Scientifique en France. Nous rappelons qu'à une variable aléatoire continue X on associe une fonction de densité f qui doit vérifier, pour les élèves de terminale, les contraintes suivantes :

- f est définie et continue[3] sur I ;
- f est positive sur I ;
- L'aire sous la courbe de f vaut 1.

1. Présentation de la séance d'enseignement

La séance étudiée est extraite d'une ingénierie qui a été expérimentée en mars 2015 dans une classe de terminale scientifique, dans un lycée parisien. L'objectif global de cette ingénierie était de de construire et de favoriser les liens entre le calcul intégral et les lois de probabilités à densité en introduisant le calcul intégral par des problèmes de probabilités continues. La séance étudiée est la troisième de la séquence. En amont de cette séance, des rappels sur les histogrammes et une première rencontre avec une loi uniforme ont été faits dans un devoir à la maison. Lors de la première séance, un problème de rencontres a été résolu en faisant appel à la valeur absolue de la différence de deux lois uniformes. Cette séance avait fait émerger les contraintes que doit vérifier une fonction de densité (séance 2). Nous rappelons que le calcul intégral n'a pas encore été abordé dans cette classe.

L'énoncé du problème (annexe 5) est essentiellement constitué de données : les années des éruptions du volcan Aso (Japon) du XIII^e^ au XIX^e^ siècle et les temps d'attente entre deux éruptions successives. Les questions données aux élèves sont les suivantes :

[3] La continuité de f n'est pas nécessaire mais elle est ajoutée dans le programme de terminale scientifique.

Le volcan Aso est actuellement en éruption.
Comment évaluer la probabilité que la prochaine éruption :
a) Ait lieu dans les 5 ans ?
b) Au cours de l'année 2030 ?

Le déroulement de la séance peut être découpé en tâches et sous-tâches, comme ci-dessous :

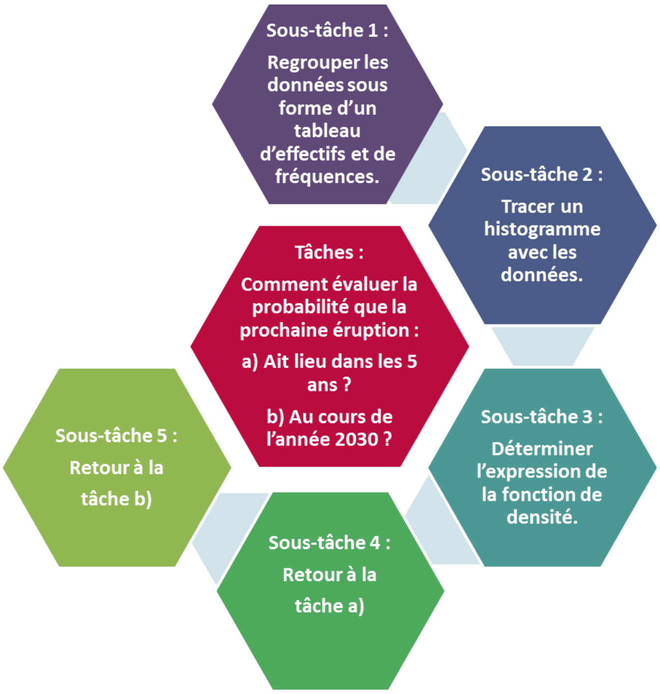


Fig. 1. Découpage du déroulement du problème en sous-tâches

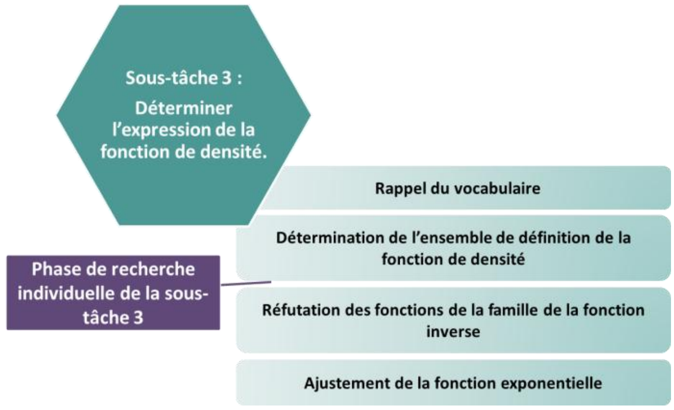


Fig. 2. Zoom sur la sous-tâche 3

2. Recherche de la fonction de densité

Nous allons pour ce travail nous focaliser sur la sous-tâche 3 : « Déterminer l'expression de la fonction de densité » (fig. 2). En amont de cette sous-tâche, au cours de la mise en commun, l'enseignante a affiché les histogrammes associés aux données de l'énoncé : l'un avec une amplitude de 4, l'autre une amplitude de 5 (cf. annexe 5). Il a été remarqué par la classe que les deux histogrammes amenaient vers une allure identique de la fonction de densité. L'enseignante, Marie, demande donc aux élèves de déterminer l'expression de la fonction de densité.

Marie : Alors, donc le problème c'est quoi finalement là ? On en est où là tous ? Je vous laisse chacun 5 minutes.
Elève A42 : Faut trouver l'équation…
Marie : C'est quoi l'objectif ? Trouver…
Elève A42 : L'équation.
Elève A52 : Une courbe de tendance.
Plusieurs élèves : Une courbe de tendance.
Marie : L'équation, l'expression de… de votre courbe de tendance.
[…] *Marie écrit au tableau* : On cherche une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ qui approche « au mieux » l'histog.

3. Découpage de la séance et circulation dans le diagramme des ETM

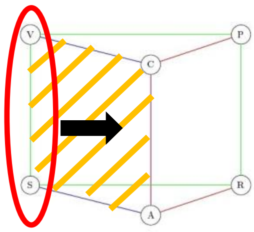
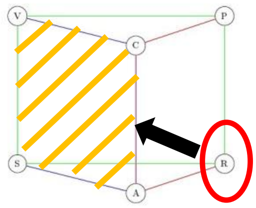
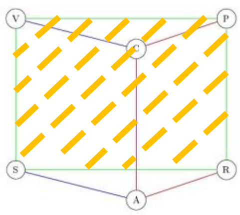
L'analyse demandée aux participants du TD portait sur un moment particulier de la discussion en classe entière au cours de la sous-tâche 3 : celui de la réfutation du choix d'une fonction de la famille de la fonction inverse comme fonction de densité (cf. annexe 6, à partir de la ligne 59 de la transcription).

Les questions qui cadraient le travail étaient :

- **Q1** – Faire un découpage de la transcription en phases, liées à des transformations du travail mathématique et des changements de buts de l'activité.
- **Q2** – Identifier les différentes entrées et les interactions dans l'ETM (sémiotique, discursive, instrumentale) dans chacune de ces phases.
- **Q3** – Identifier les paradigmes de l'analyse en jeu suivant ces phases.
- **Q4** – Préciser le rôle respectif du professeur et des élèves dans chacune de ces phases.

Bien entendu, dans le temps imparti, il était impossible de faire ce travail pour tout l'extrait. Le but était de plus réfléchir et se poser des questions sur le début de l'extrait. Mais il nous paraissait important de donner cet extrait entier pour bien resituer le travail mathématique dans la classe à ce moment.

Après une phase de lecture et de travail par groupe de 3 ou 4 personnes, la mise en commun a mené à des discussions très intéressantes sur le découpage en phases. Il a ensuite été proposé notre propre analyse de l'extrait, que nous avons découpé en six phases que nous donnons ci-dessous :

Phase	**Lignes**	**Diagramme associé**	**Paradigme**
1- Premières adaptations de la courbe de la fonction inverse, avec la contrainte de courbe qui approche le mieux l'histogramme. *La visualisation déclenche puis nourrit un travail dans la dimension instrumentale.*	59 à 82		AG
2- Régulation avec la contrainte que la fonction doit être positive *Un appel au référent théorique modifie le travail sémiotico-instrumental.*	82 à 141		AG
3- Recherche de la forme canonique des transformées affines de la fonction inverse (travail algébrique) *Travail dans le plan sémiotico-discursif.*	141 à 156		AC

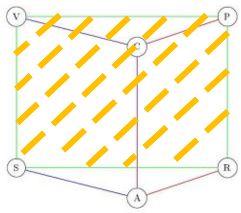
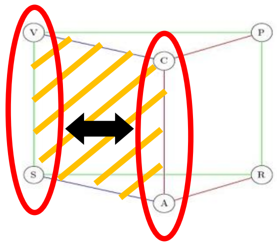
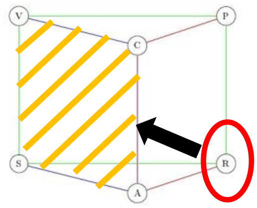
Phase	Lignes	Diagramme associé	Paradigme
4- Réflexion sur les limites pour simplifier la forme canonique de la fonction, avec la contrainte de la positivité de la fonction. *Travail dans le plan sémiotico-discursif.*	157 à 175		AC
5- Phase d'ajustement avec les curseurs (GeoGebra), avec la contrainte que la courbe de la fonction doit être proche de l'histogramme. *Interactions entre les dimensions sémiotique et instrumentale.*	175 à 216		AG
6- Phase d'ajustement avec les curseurs (GeoGebra), avec la contrainte que l'aire sous la courbe doit être égale à 1 (et la courbe proche de l'histogramme). *A nouveau, un élément théorique modifie le travail sémiotico-instrumental.*	216 à 267		AG

Table 1 : Notre découpage en phase

Au niveau du rôle de l'enseignant, on peut remarquer que les changements de paradigmes sont à la charge de l'enseignante et que le travail effectué dans le paradigme AC est ici assuré par l'enseignante. De plus, elle est toujours à l'origine de la mobilisation du référentiel théorique.

3. Conclusion

Le découpage en phases est établi en étroite relation avec l'observation des correspondances avec un changement dans le travail mathématique. Pour nous, de fait, au delà du découpage en phases, ce qui va être intéressant est l'observation globale de la suite des diagrammes qui rend compte de la richesse, ou non, des différentes interactions entre les dimensions et les plans du modèle des ETM.

L'activité que nous avons observée témoigne d'interactions nombreuses entre les différentes dimensions du modèle mais elle laisse en suspens la question du travail effectif des élèves dans cette circulation. En effet, les changements de plans, la dimension discursive notamment dans le paradigme AC et le logiciel sont pilotés et gérés par le professeur et des questions se posent quant aux apprentissages des élèves. Quel est l'impact de cette gestion sur l'ETM personnel des élèves ? Quel sera leur travail réel en situation d'autonomie ? Cette question suppose la mise en place d'autres activités qui restent relativement ouverte ou bien qui se concentrent sur certaines dimensions du travail : travail particulier de preuve dans AC, utilisation par les élèves des logiciels.

La question du rôle de l'analyse a priori pour comprendre le déroulement de la séance a également été posé dans le cadre de séances de classe où l'incertitude sur les propositions des élèves est grande. Dans le cas particulier de cette séance, la question primordiale était d'analyser les possibles propositions de fonctions candidates par les élèves et ensuite de savoir le type de propriétés mobilisables pour accepter ou non la fonction proposée en tant que fonction de densité associé à l'histogramme.

L'illustration en terme de circulation en distinguant les rôles du professeur et des élèves permet de penser qu'un autre partage de l'activité est possible pour accroitre les initiatives des élèves soit au cours de cette séance soit pour la mise en place d'activités futures.

PARADIGMES ET PERSPECTIVES DE LOCALITÉ : LE CAS DE LA TANGENTE

Dans cette dernière section, nous proposons, à travers l'objet tangente, un développement du modèle des ETM avec les perspectives de localité : locale, globale, ponctuelle (Maschietto, 2003 ; Rogalski, 2008 ; Vandebrouck, 2011). Cela nous permet de traiter un autre jeu caractéristique de l'analyse, la dialectique local/global.

Nous commençons par exposer les analyses d'un test au Chili dans le registre graphique. Nous continuons par un autre questionnaire écrit au Chili, en France et au Mexique où les tâches sont données principalement dans le registre algébrique. Si l'entrée des deux questionnaires est constituée par les registres de représentation, les analyses sont également menées à l'aide des paradigmes. Et même si le registre graphique favorise le paradigme AG et si le registre algébrique favorise le registres AC (voire AI), il ne faut pas confondre registres et paradigmes comme nous le verrons.

1. Le test graphique

Pour 12 courbes, il est demandé à 44 étudiants de première année d'université au Chili de tracer dans le registre graphique une droite tangente qui passe par un point de la courbe. Cette tâche a également été proposée à un public de professeurs de mathématiques, en France et au Mexique, et nous proposons certaines de ces productions. Des analyses a priori pour les différentes courbes peuvent être trouvées dans (Montoya et Vivier, 2015) et (Páez et Vivier, 2013), nous ne les reproduisons pas ici et nous nous focalisons uniquement sur quelques courbes pour mettre en évidence nos analyses avec les paradigmes et les perspectives.

Les perspectives en jeu

L'enjeu de ces tâches, est de coordonner les trois perspectives (une coordination cruciale pour les objets de l'analyse, notamment avec la perspective locale). Une bonne coordination de ces perspectives mène à un tracé du type de la figure 3. où les trois perspectives sont vraisemblablement activées tour à tour, dans cet ordre, accompagnés de gestes instrumentés, l'ensemble des genèses étant dans le plan [Sem-Ins] :

1. ponctuelle, regard porté sur le point, règle placée sur le point, avec ou sans stylo pointé sur le point ;
2. locale, ajustement de la règle pour une coïncidence locale avec la courbe au voisinage du point considéré, le regard est local ;
3. globale, le regard est « dézoomé », tracé global de la droite.

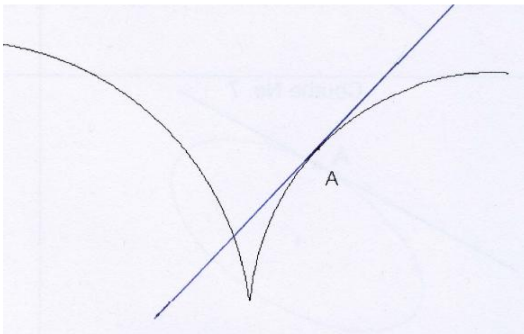


Figure 3 – étudiant-professeur de mathématiques en France

Les genèses activées par les 44 étudiants chiliens montrent que la perspective ponctuelle ne pose aucun problème dans le sens où toutes les droites tracées passent par le point en question. Il en serait sans doute autrement dans une situation où le point n’est pas sur la courbe. Les analyses qui suivent se focalisent donc principalement sur les perspectives locale et globale.

Courbe n°2 : la tangente recoupe la courbe

Nous présentons ici six productions représentatives des réponses des étudiants.

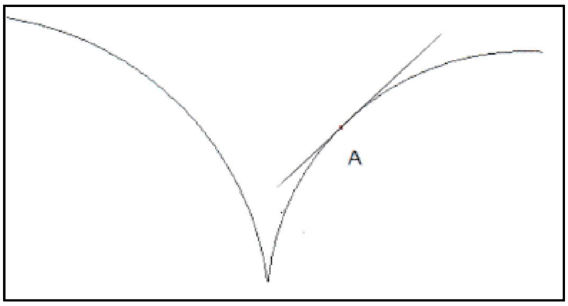
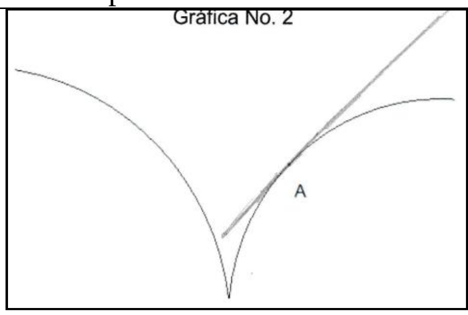
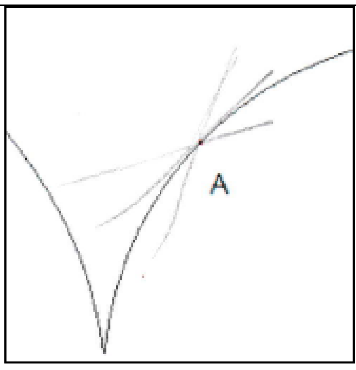
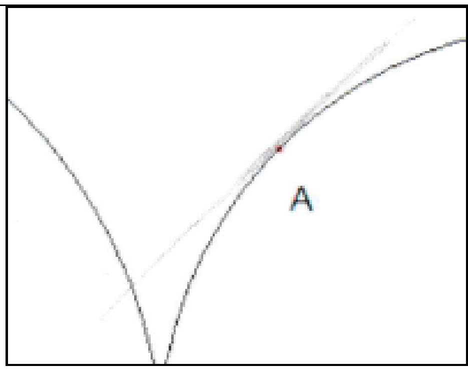
 *A6*	 *A8*
On ne peut pas dessiner une tangente en ce point puisqu’elle couperait en deux points dans le cas où on le ferait. *A14*	La tangente n’existe pas puisqu’en un certain point elle couperait la fonction. *A17*
 *A10*	 *A28*

Figure 4

Si A28 présente une production correcte, comme en figure 3, les autres étudiants donnent des réponses que nous interprétons avec les perspectives de la manière suivante. La conception en jeu a été mainte fois relevée : une tangente ne peut avoir qu'un seul point en commun avec la courbe. Cette conception peut être interprétée avec la perspective ponctuelle : par chaque point de la courbe, il ne passe qu'une seule droite tangente à la courbe (il y a ici une perspective globale sur la courbe). Or, dans cette situation, en traçant la droite tangente, celle-ci recoupe la courbe. Les étudiants s'adaptent donc pour conserver une cohérence :

- A6 et A8 ne tracent qu'une partie de la droite tangente, les perspectives ponctuelle et locale sont tout à fait correcte pour ce tracé, mais le défaut dans la perspective ponctuelle (unicité droite-point sur la courbe) entraîne une adaptation, incorrecte, dans la perspective globale : la tangente n'est plus une droite. C'est beaucoup plus clair pour A8 que pour A6 puisqu'il s'arrête presque *au dernier moment*. Il est à noter que ce type de réponses s'accompagnent d'explication pour des sujets plus avancés en mathématique (enseignants ou futurs enseignants) où la restriction est explicite.
- A14 et A17 font une autre adaptation qui s'appuie sur une perspective globale correcte (une tangente est une droite). Le défaut d'unicité droite-point de la courbe dans la perspective ponctuelle implique simplement la non existence d'une tangente.
- A10 propose trois tracés de droite, proche des productions de A6 et A8, dont l'une d'elle est la tangente. Ainsi, l'unicité droite-point de la courbe de la perspective ponctuelle en quelque sorte dégénère pour proposer d'autres *tangentes* au point considéré et la perspective locale ne semble pas assez assurée pour empêcher cette dégénérescence.

Courbe n°5 : la courbe est une droite

Nous présentons ici cinq productions représentatives des réponses des étudiants.

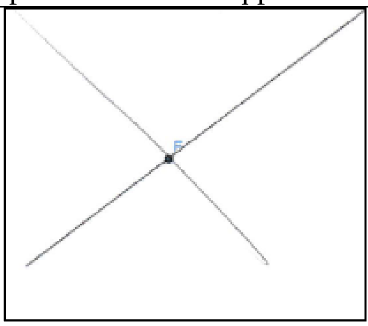
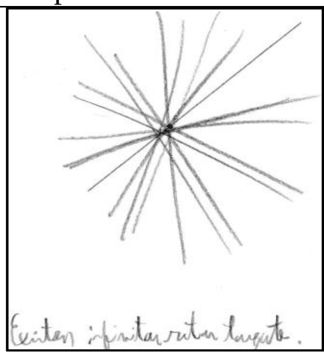
<table>
<tr><td>
A10</td><td>
A1</td></tr>
<tr><td colspan="2">**A6** : La droite tangente est de pente 0, c'est-à-dire, c'est la même droite.</td></tr>
<tr><td colspan="2">**A17** : La tangente n'existe pas, vu qu'étant une fonction linéaire, elle toucherait la fonction en tous les points.</td></tr>
<tr><td colspan="2">**A28** : *La tangente est tracée sur la droite initiale, sans explication*</td></tr>
</table>

Figure 5

Pour cette courbe, l'adaptation de A6-A8 de la section précédente n'est plus possible. On retrouve les réponses menant à la non-existence de la tangente avec A17 et celles où la perspective locale est faible comme pour A10 à la section précédente : A10 ne propose plus la tangente parmi ses réponses (trace-t-il la perpendiculaire ?) et A1 affirme même qu'il y a une infinité de tangentes.

En revanche, le fait que ce soit une droite permet de reconnaître un type de courbes étudiées, celles des fonctions affines dont on connait la dérivée qui mène à une équation de tangente qui est donnée par la fonction elle-même. On peut ainsi interpréter les réponses de A6 et A17 comme une réponse dans le paradigme AC après une visualisation et une identification de l'objet mathématique dans AG, objet qui permet un changement de paradigme. Néanmoins, les conclusions de ces deux étudiants sont bien différentes.

Courbe n°12 : la courbe n'est pas régulière

Nous présentons ici quatre productions représentatives des réponses des étudiants.

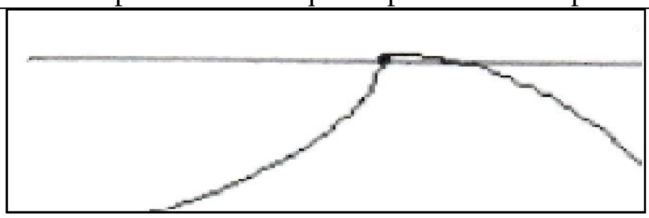
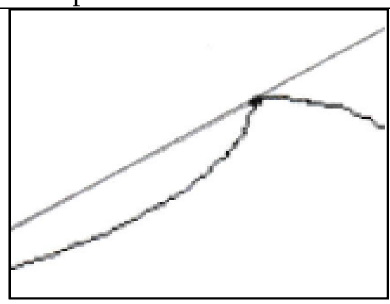
<table>
<tr><td>
A14</td><td>
A17</td></tr>
<tr><td colspan="2">**A6** : C'est une pointe, ce n'est pas dérivable, on ne peut pas trouver de pente à la droite tangente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">**A12** : Les dérivées latérales sont distinctes.</td></tr>
</table>

Figure 6

A14 trace une seule des deux demi-tangentes, il est difficile de tirer des conclusions avec cette seule production. Les trois perspectives semblent bien coordonnées, mais il est à noter qu'il ne trace pas la demi-tangente qui traverse la courbe (ce qui est une source de difficulté repérée). La réponse de A17, en revanche, montre un défaut dans la perspective locale, mais il est encore difficile de préciser plus à partir de cette seule production.

Ce qui nous semble ici important concerne plutôt les paradigmes. On peut penser que le paradigme AG ne permet pas de justifier la non existence d'une tangente à cause de la rupture de régularité. On relève ainsi, comme pour A6 et A12, des changements pour le paradigme AC, plus clair et plus fréquent que pour la droite (section précédente).

Conclusion du test graphique

Les trois perspectives de localité sont présentes dans la plupart des réponses des étudiants. La déconstruction par les perspectives permet de préciser le travail des étudiants, les adaptations faites, les conceptions que les étudiants ont de la notion de tangente.

Le paradigme dominant est AG, mais on relève une nécessité de changer de paradigme notamment pour la non existence (genèse discursive dans AC voire AI) ou pour l'existence dans un cas problématique (pour le cas d'une droite). Cela permet en outre de comprendre la différence entre registre et paradigme.

Dans la table 2, on a reporté les réponses des 44 étudiants chiliens pour trois courbes représentatives. Bien que réussissant tous à tracer la tangente en un point régulier d'une courbe où la tangente ne recoupe pas la courbe (c'était la courbe #1, un cercle et une ellipse), on remarque à travers cette table les adaptations en fonctions des courbes proposées ainsi que l'importance des réponses de type Unique Point d'Intersection (UPI) et Droite Non Tangente (DNT). Dans cette table, on relève aussi les Non Réponses (NR), les réponses correctes (OK), le tracé d'une Tangente Partielle (TP) qui ne recoupe pas la courbe ainsi que les Autres Non Existences (Autre NE).

	#2	#5	#12
NR	0	5	3
OK	10	19	15
TP	13	0	0
UPI	**18**	6	2
DNT	1	14	25
Autre-NE	1	2	16
Autre réponses	1	0	0

Table 2 : réponses des étudiants chiliens

2. Le test algébrique

Nous présentons ici une autre étude basée sur un questionnaire, centré sur le registre algébrique, proposé à des étudiants de première année d'université (après le chapitre sur la dérivation) : 14 étudiants chiliens du Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), 6+3 étudiants français (Universités Paris 7 et Paris 13) et 25 étudiants mexicains de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM).

Nous ne proposons pas toutes les questions, mais uniquement celles où les objets mathématiques en jeu sont ceux exposés à la section précédente : tangente qui recoupe la courbe, fonction affine, défaut de régularité.

Une perspective locale masquée

A la question suivante :

Q2a : On considère la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = x^2+1$. Déterminez, si possible, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

On relève une forte présence du paradigme AC, la majorité des étudiants savent qu'il faut dériver, puis utiliser la *formule de la tangente*. Les perspectives ponctuelle et globale sont bien coordonnées, mais la perspective locale est totalement absente, elle est cachée dans la dérivation. Il y a peu de représentations graphiques, ce qui est sans doute lié au contrat didactique, ce qui bloque un éventuel contrôle de la droite trouvée. Par ailleurs, sur cette tâche de base, la réussite apparaît faible au Mexique.

	OK	**Travail dans AC**	**Utilisation d'un Graphique**
Chili (14)	9	14	5
France (9)	6	9	2
Mexique (25)	4	17	14

Table 3 : réussite à la question 2a

La question 3 : le cas de la droite

3. Soit la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2x+5$. Si possible, déterminer une tangente à la courbe de la fonction f au point B de coordonnées (-2,1).

Nous présentons en figure 7 trois productions des étudiants à cette question 3 demandant la tangente à une fonction affine.

$f(x) = 2x+5$

$T(x) = f'(x)\ (x-a) + f(x)$

$= 2\ (x+2) + 2x+5$

Faux ici.

$= 2x - 1 + 2x + 5$

$= 4x + 4$

Faux.

$T(x) = 2\ (x+2) + 2x+5$

$= 2x + 4 + 2x + 5$

$= 4x + 9$

Lorsque $x = -2$ $\quad T(x) = 4(-2)+9$

$= -8+9$

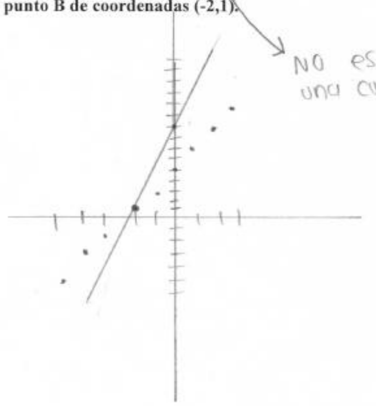
$= 1$

D'où $T(x) = 4x+9$ est une tangente à la courbe de f au point B de coordonnées $(-2,1)$

F8 (Paris 13)

3. Dada la función $f(x)$=2x+5, si es posible, encuentre una recta tangente a la curva de f en el punto B de coordenadas (-2,1).

No es una curva.



x (2x+5)	Y
-3	-1
-2	1
-1	3
0	5
1	7
2	9
3	11

$f(x) = 2x+5$

$m = 2$

$Y = 2(x+4)+1$

$Y = 2x+8+1$

$Y = 2x+9$

punto de intersección con Y.

CDF3 (UACM)

C10 (PUCV) : « Il n'est pas possible de trouver une droite tangente puisqu'en ce point quelle que soit la droite, elle coupera *f*, mais aucune droite sera tangente à cette fonction en ce point. »
[*La fonction f est représentée graphiquement correctement ; le calcul « f'(x)=2 »*]

Figure 7

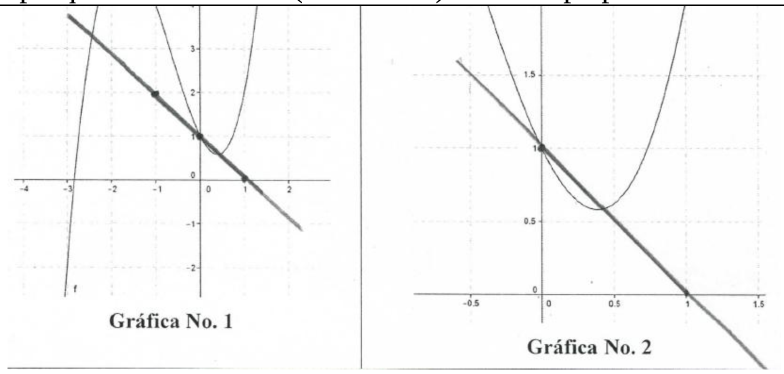
On retrouve avec la question posée dans le registre algébrique les difficultés exposées sur la courbe #5 (mentionnée ci-dessus dans le test graphique) : pour F8 et CDF3, une droite différente de la courbe de *f* est donnée comme tangente. A chaque fois, il s'agit d'une erreur de calcul, mais il n'y a pas de contrôle de la réponse donnée, même pour CDF3 qui produit une représentation graphique. Or, un contrôle serait nécessaire mais qui nécessite une perspective locale qui se retrouve être absente dans les deux productions. Ce contrôle par une perspective locale apparaît dans la réponse de C10, même s'il ne répond pas correctement, cela lui permet d'écarter toutes les droites passant par le point en question… hormis la droite représentant *f*.

La question 4a : la tangente recoupe la courbe

4. Soit la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^3+2x^2-2x+1$.
a- La droite d'équation $y=-2x+1$ est-elle une tangente à la courbe de la fonction *f* au point (0,1) ? [*deux graphiques à différentes échelles sont donnés, avec la courbe, sans la droite.*]

F4 et F7 tracent la droite sur le graphique 1 et effectuent des calculs dans le paradigme AC pour justifier que la droite proposée est bien tangente à la courbe. On peut penser que le graphique sert de contrôle et, surtout, à conjecturer la réponse : F4 propose de « vérifier » et F7 énonce clairement une conjecture, « Après une analyse graphique, on suppose que la droite d'équation $y=-2x+1$ est une tangente à *f* en (0,1) », avant de faire les calculs.

Certains étudiants répondent positivement sans donner de justification : F2 et F3 écrivent « oui » et CDF1 « oui, c'est une droite tangente ». D'autres répondent négativement, mais avec une justification, dans le paradigme AG. Nous retrouvons ici, malgré un énoncé dans le registre algébrique, des réponses uniquement en appui sur le registre graphique. En figure 8 on trouve : CIC2 active les perspectives globale, sans doute correcte, et ponctuelle, avec l'unicité point de la courbe-tangente ; CDF11 semble plutôt activer la perspective locale, au moins dans le graphique 2 où la droite (mal tracée) ne recoupe pas la courbe.



CDF11 (UACM)

CIC2 (UACM) : Non, elle touche deux points de la fonction.

Figure 8

La question Q6 : défaut de régularité

6. Soit la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^2 + |2 + x - x^2|$. Préciser, selon les points, si la courbe de cette fonction admet ou non une tangente. [*L'énoncé est accompagné d'un graphique avec les deux points anguleux.*]

Les réponses pointent au moins un des deux points anguleux, il y a donc une visualisation sur le graphique activée par les perspectives locale et ponctuelle. Cela dit, les réponses sont différentes et l'on retrouve les mêmes types de réponses que dans le test graphique, que ce soit dans le registre algébrique avec F6 et F8, ou dans le registre graphique avec C6 et CIC5.

en $x=-1$, $y=1$ est une tangente en $x=2$, $f(x)$ admet une tangente	Selon les points (-1 ; 1) $y=1$ est une tangente Selon les points (-1 ; 1) et (2 ; 4) $y=x+2$ est une tangente

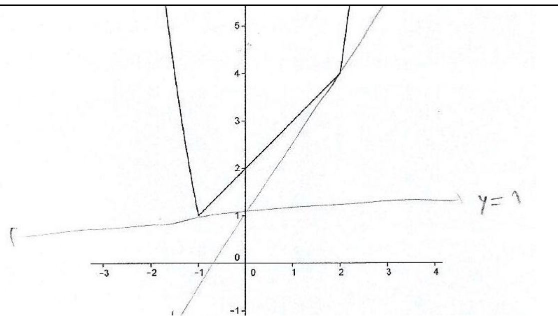
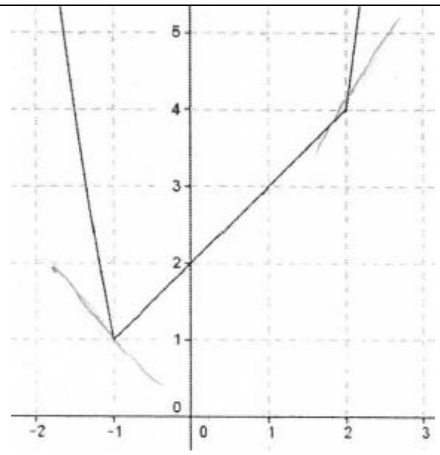
F8	*F6*
 Les tracées sont les tangentes globales mais il existe une infinité de droites tangentes si nous considérons des intervalles de celles-ci, c'est-à-dire localement. *C6*	 *CIC 5*

Figure 9

Des étudiants affirment, par un travail dans AG proche de celui de la courbe n°12 ci-dessus (A6 et A12 en figure 6), qu'il y a un défaut de dérivabilité ou se posent plus simplement la question de la dérivabilité.

D'autres étudiants travaillent essentiellement avec une perspective ponctuelle dans le registre algébrique, avec un travail dans le paradigme AC :

- F4 affirme que la valeur absolue n'est pas dérivable en 0 et résout (correctement) l'équation $2+x-x^2=0$ avant d'affirmer qu'il n'y a pas de tangente en -1 et en 2. Même si la justification dans AC est incomplète, il y a sans doute un contrôle dans AG avec le graphe proposé.
- F7 calcule $f'(x)=2x+|1-2x|$ sans se préoccuper de la valeur absolue, pour ensuite trouver l'équation de la tangente en $x=2$: $T(x)=7x+18$; cette équation est barrée. Toutefois, il y a un travail manifeste sur le graphique, dans AG, avec l'identification du point $x=2$ et sans doute un contrôle de la droite trouvée puisqu'elle est barrée.

3. Conclusion

La tangente est un objet intéressant pour exposer des analyses sur les paradigmes et les perspectives de localité. Mais il est aussi intéressant pour travailler une l'articulation (dialectique) AG/AC (voire AI) et les différentes perspectives. L'absence de perspective locale dans le travail dans AC pourrait être comblée, au moins en partie, par un travail dans AG ce qui permettrait également de pouvoir contrôler les résultats.

En outre, il semble bien que les réponses de certains étudiants soient identiques, que ce soit dans le registre graphique et algébrique. Il serait intéressant de faire un autre questionnaire, graphique et algébrique, avec les mêmes sujets.

Bien entendu, il faudrait compléter ces productions écrites, notamment par des entretiens, pour être sûr de cette interprétation. Les perspectives de localité peuvent servir de guide pour l'entretien.

BIBLIOGRAPHIE

Maschietto, M. (2003). Le rôle de la calculatrice dans le d´enveloppement du langage autour du jeu global / local. Lagrange J.B. & al. (eds). Jun 2003, Reims, France.

Montoya Delgadillo, E., Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico - Cambios de dominios y de puntos de vista, *Proceedings of CIAEM XIV*, 5-7 june 2015, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Páez, R. & Vivier, L. (2013). Teachers´ conceptions of tangent line. The journal of mathematical behavior, *32*, 209-229.

Robert A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-68). Toulouse : Octarès.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : Mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 61-87). Paris: PUF.

Vergnac & Durand-Guerrier (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique, Petit x, n°96, 7-28.

Vandebrouck, F. (2011). Points de vue et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de Strasbourg*, *16*, 149-185.

ANNEXES

Annexe 1 : Extraits des programmes : introduction de l'exponentielle

II° Medio (grade 10, Chili) et IV° Medio (grade 12, Chili)

2° medio	**4° medio Electivo**
Algèbre	**Fonctions et Processus infinis**
a) Analizar gráficamente la función exponencial, en forma manual y con herramientas tecnológicas. b) Analizar gráficamente la función logarítmica, en forma manual y con herramientas tecnológicas. c) Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.	a) Analizan las transformaciones que producen diferentes tipos de iteraciones y establecen relaciones cuantitativas y cualitativas entre los objetos que se obtienen. b) Reconocen que una suma se puede representar en forma compacta por medio de la notación de sumatoria. Conocen y aplican propiedades de ésta y calculan las sumas de algunas series geométricas y telescópicas. c) Demuestran generalizaciones sencillas. d) Conocen las progresiones aritméticas y geométricas; aplican algunas propiedades en la resolución de problemas.

Terminale S (grade 12, France)

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Fonction exponentielle Fonction $x \rightarrow \exp(x)$	Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

		L'existence est admise.

Terminale ES (grade 12, France)

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonction exponentielle Fonction $x \rightarrow q^x$ avec $q > 0$. Relation fonctionnelle.	Connaître l'allure de la représentation graphique de la fonction $x \rightarrow q^x$ selon les valeurs de q.	Ces fonctions sont présentées comme un prolongement continu des suites géométriques. On admet que ces fonctions sont dérivables sur **R** et transforment les sommes en produits.

Annexe 2 : Extrait des manuels

Manuel Hyperbole TES (2012)

Objectif
Découvrir une modélisation continue.

1 Évolution d'un marché immobilier

Dans un pays fictif, les prix de l'immobilier progressent, depuis 2008, de 21 % par an. Un appartement est estimé à 100 000 unités monétaires (um) au 1er janvier 2011.

On se propose d'observer l'évolution de la valeur de ce bien immobilier au fil du temps.

L'instant $t = 0$ est le 1er janvier 2011 et on note $v(t)$ la valeur de ce bien en centaines de milliers d'um à l'instant t (en années). Ainsi $v(0) = 1$.

1 Pour tout nombre entier naturel n, on pose $u_n = v(n)$.
Quelle est la nature de la suite u ? Calculer u_1 et interpréter.

2 a) Calculer $v(-1)$ et $v(-2)$. Interpréter ces résultats.
b) Avec un tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ avec le pas 1 et représenter graphiquement ce tableau.

3 Le propriétaire souhaite connaître la valeur de l'appartement début juillet 2011.
a) Déterminer le taux équivalent pour un semestre au taux annuel de 21 %.
b) En déduire $v(0,5)$. Calculer alors $v(1,5)$ et $v(2,5)$, puis interpréter.
c) Vérifier que $v(1,5) = v(1 + 0,5) = v(1) \times v(0,5)$ et $v(2,5) = v(1 + 1,5) = v(1) \times v(1,5)$.
d) Avec un tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ avec le pas 0,5 et représenter graphiquement ce tableau.

4 On observe maintenant l'évolution de la valeur du bien, mois par mois.
a) Vérifier que 1,6 % est le taux mensuel approché équivalent à un taux annuel de 21 %.
b) En déduire $v\left(\frac{1}{12}\right)$, c'est-à-dire la valeur du bien au 1er février 2011.
c) Avec le tableur, tabuler la fonction v sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ avec le pas $\frac{1}{12}$ et représenter graphiquement ce tableau.

5 Afficher à l'écran de la calculatrice, la courbe de la fonction $x \mapsto 1,21^x$ sur $[-2 ; 6]$ et tabuler la fonction avec le pas $\frac{1}{12}$. Comparer avec les résultats de la question **4**.

Note
On dit que cette fonction est **la fonction exponentielle de base 1,21**, sa courbe prolonge le nuage représentatif de la suite v de la question **1**.

Manuel Transmath TES (2012)

Activité 1 D'UNE SUITE À UNE FONCTION

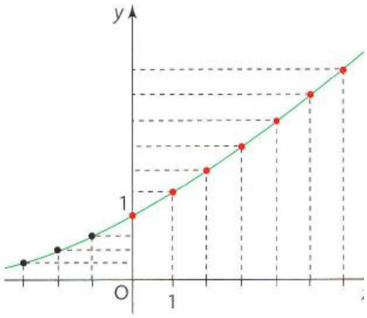
1 a) Vérifiez que les sept premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(1,2)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $(-1\,;(1,2)^{-1})$, $(-2\,;(1,2)^{-2})$ et $(-3\,;(1,2)^{-3})$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $\boldsymbol{f(x) = (1,2)^x}$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(1,2)^{\frac{5}{2}}$ et de $(1,2)^{-1,5}$.



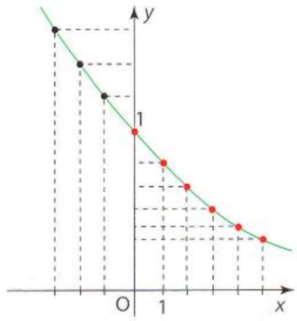
2 a) Vérifiez que les six premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(0,85)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $(-1\,;(0,85)^{-1})$, $(-2\,;(0,85)^{-2})$ et $(-3\,;(0,85)^{-3})$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $\boldsymbol{f(x) = (0,85)^x}$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(0,85)^{\frac{3}{2}}$ et $(0,85)^{-2,5}$.



Les courbes d'équation $y = q^x$ avec $q > 0$ s'obtiennent à partir des représentations graphiques des suites (q^n).

Manuel Transmath TS (2012)

Activité 1 LA CROISSANCE EXPONENTIELLE

TICE

Estimer la population mondiale des prochaines décennies est une préoccupation importante des économistes. Savoir si la Terre pourra nourrir tous ses habitants est, en effet, une question essentielle.

Pour cela, il est nécessaire de recourir à des modélisations de la croissance de cette population.

Le modèle démographique retenu par certains économistes, comme l'Anglais Thomas Robert Malthus (1766-1834), est celui d'une évolution selon une progression (suite) géométrique, ce qui signifie que le taux d'évolution d'une année à l'autre est constant.

Autrement dit, si P_n désigne la population mondiale à l'année n, le rapport $\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$ est constant.

On parle alors de **croissance exponentielle.**

Ce vocabulaire est aussi utilisé en biologie et en mathématiques.

1 Évolution démographique

La population mondiale a atteint officiellement 7 milliards d'habitants le 31 octobre 2011, avec un taux de croissance estimé à environ 1,2 % par an.

On fait l'hypothèse d'une croissance exponentielle avec un taux de croissance constant de 1,2 % par an. Répondez aux questions suivantes, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

a) De combien d'habitants sera la population dans 20 ans ?

b) Dans combien d'années atteindra-t-elle 10 milliards ?

c) Combien d'années seront nécessaires au doublement de la population ?

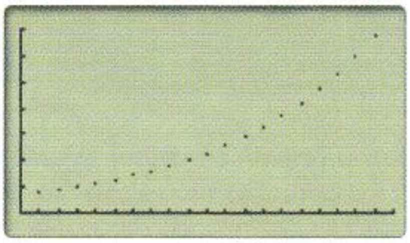
Cette hypothèse a été critiquée dès son émission comme étant trop simplificatrice et conduisant à des prévisions inutilement alarmistes. Il existe d'autres modèles de croissance, comme le modèle de Verhulst (voir l'exercice 21, p. 93).

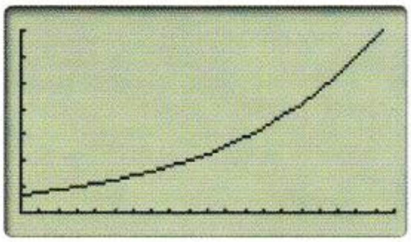
2 Vers une représentation par une courbe

a) Représentez sur votre calculatrice les dix premiers termes de la suite géométrique de raison $1{,}012^{10}$ et de premier terme 7 (c'est-à-dire telle que pour tout entier naturel n, $a_n = 7 \times 1{,}012^{10n}$), qui correspond à l'évolution de la population mondiale suivant la modélisation vue en **1**, de décennie en décennie. Fenêtre d'affichage : X de 0 à 20, pas 1 ; Y de 0 à 70, pas 10.

b) Représentez la fonction $x \longmapsto 7 \times 1{,}012^{10x}$ pour $x \in [0\,;15]$. (Utilisez la touche $\boxed{\wedge}$.)

Comparez la courbe obtenue avec la représentation précédente.





Conclusion : La calculatrice permet d'obtenir une courbe qui coïncide, pour les points d'abscisses entières, avec la représentation de la suite.

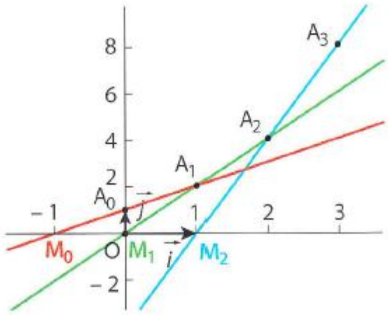
Activité 2 VERS UNE FONCTION ÉGALE À SA DÉRIVÉE

TICE

1 Une famille de droites

Sur la figure ci-contre, sont représentés, dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les premiers termes de la suite géométrique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point de coordonnées $(n ; 2^n)$ et M_n l'intersection de (A_nA_{n+1}) avec l'axe des abscisses.



a) Quelle conjecture faites-vous concernant les abscisses des points M_0, M_1 et M_2 ? Démontrez-la.

b) On suppose avoir poursuivi la représentation des termes de la suite (u_n) et donc la construction des points M_n.
Vérifiez que pour tout entier naturel n, la droite (A_nA_{n+1}) a pour équation $y = 2^n x + 2^n(1-n)$ et qu'elle coupe l'axe des abscisses en $M_n(n-1 ; 0)$.

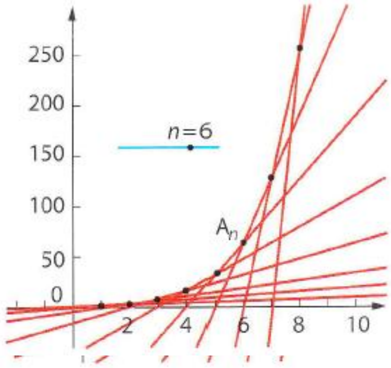
2 Mise en œuvre avec GeoGebra

a) Créez successivement :

- un curseur n (0 à 8 ; incrément 1),
- la suite de points $A_n = (n, 2^n)$,
- la droite (A_nA_{n+1}).

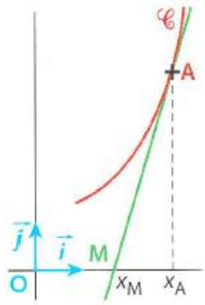
b) Faites afficher la trace de la droite lorsque le curseur varie. (Échelle : 1:20)

On conçoit l'existence de courbes représentatives de fonctions dérivables et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, ayant pour tangentes les droites (A_nA_{n+1}).



3 Une propriété caractéristique

On suppose l'existence d'une fonction f dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dont la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$: pour tout point A de $\mathscr{C}$, la tangente en A à $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point M d'abscisse $x_M = x_A - 1$.



a) Quelle hypothèse permet d'affirmer que $f'(x_A) > 0$?

b) Déterminez une équation de la tangente en A à $\mathscr{C}$.

c) Déduisez-en que M a pour abscisse $x_A - \dfrac{f(x_A)}{f'(x_A)}$.

d) Déduisez-en que la fonction f vérifie la propriété $\mathscr{P}$ si et seulement si $f' = f$.
La fonction exponentielle étudiée dans ce chapitre est l'une de ces fonctions.

Manuel Repères TS (2012)

1. TICE Fonction exponentielle et méthode d'Euler

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.
Le but de cette activité est de représenter graphiquement la fonction f en utilisant la méthode d'Euler.

On va construire une suite de points $(x_n\,;\,y_n)$ telle que y_n soit proche de $f(x_n)$. Ainsi le nuage de points $(x_n\,;\,y_n)$ formera une approximation de la courbe représentative de la fonction f. La suite (x_n) sera une suite arithmétique de raison $h > 0$ et de premier terme 0. h est appelé le **pas**.

1. Déterminer l'expression de x_n en fonction de n.
2. La suite y_n est définie par $y_0 = f(0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n)$.
   Montrer que y_n est une suite géométrique et indiquer sa raison.
3. a. Reproduire la page de tableur ci-contre.
   b. Quelle formule faut-il écrire en **B3**, pour obtenir la valeur de x_1 ? Recopier cette formule jusqu'en **B21**. Recopier la valeur de y_0 en **C2**.
   c. Quelle formule faut-il écrire en **C3**, pour obtenir la valeur de y_1 ? Recopier cette formule jusqu'en **C21**.
   d. Modifier la valeur du pas dans la cellule **D4** et vérifier que cela modifie les valeurs de la suite (y_n).

	A	B	C	D
1	n	x_n	y_n	
2	0	0		
3	1			h
4	2			0.1
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			

4. À l'aide du tableur, représenter graphiquement le nuage de points $(x_n\,;\,y_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 40$ et $h = 0,1$.

Vocabulaire : La fonction vérifiant $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ est appelée fonction exponentielle.

5. En prenant $h = 0,001$, calculer $f(1)$ à l'aide du tableur.

Vocabulaire : Nous verrons dans ce chapitre que $f(1)$ correspond au nombre e.

Annexe 3 : Activité d'introduction aux fonctions exponentielles en terminale ES qui correspond au cours filmé, proche du manuel (H).

I) <u>Etude d'un marché immobilier</u>

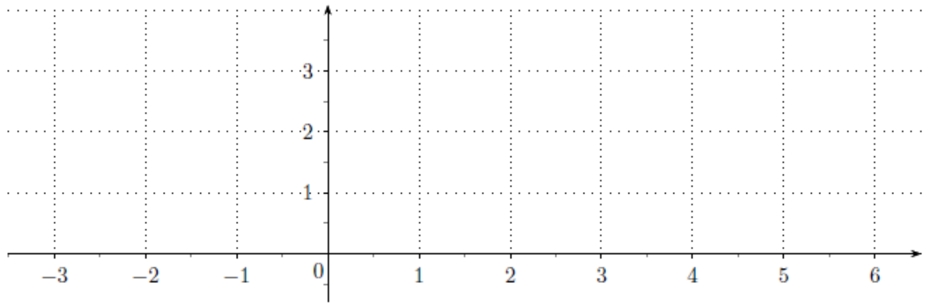
Dans un pays fictif, les prix de l'immobilier progressent, depuis 2008, de 21 % par an.
Un appartement est estimé à 100000 dollars au 1er janvier 2011.
On aimerait observer l'évolution de la valeur de ce bien au fil du temps.

On note $f(t)$ la valeur de cet appartement en centaine de milliers de dollars à l'instant t (en années) en prenant pour $t = 0$ le 1er janvier 2011. On a donc $f(0) = 1$.

1. Combien vaut $f(1)$? Et $f(2)$?
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$? Donner une expression de u_n en fonction de n.
3. (a) On aimerait connaître la valeur de l'appartement au 1er janvier 2010 et 2009 , interpréter ces calculs à l'aide de f. Quelle est cette valeur ?

   (b) A l'aide de votre calculatrice, complétez le tableau ci-dessous et représentez le nuage de points associé.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$										



4. Le propriétaire souhaite connaître la valeur de l'appartement début juillet 2011.

   (a) Quel est le taux d'augmentation pour un semestre si le taux d'augmentation annuel est de 21 % ?

   (b) En déduire $f(0,5)$. Calculer alors $f(1,5)$ puis $f(2,5)$ et interpréter ce résultat.

   (c) Vérifier que $f(1,5) = f(1) \times f(0,5)$ et que $f(2,5) = f(1) \times f(1,5)$.

   (d) A l'aide de votre calculatrice, complétez le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous et complètez le nuage de points.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$f(x)$																			

5. On veut connaître à présent l'évolution de la valeur du bien mois par mois.

   (a) Vérifier que 1,6 % est le taux mensuel approché pour avoir un taux annuel de 21 %.

   (b) En déduire $f\left(\frac{1}{12}\right)$ c'est-à-dire la valeur du bien au 1er février 2011.

   (c) A l'aide d'un algorithme, faites le tableau de valeurs de la fonction f avec le pas de $\frac{1}{12}$ et complètez le nuage de points.

6. (a) Sur notre graphique, nous sommes en train de tracer points par points la courbe représentative d'une fonction. Quelle est cette fonction ?

   On appelle cette fonction la fonction exponnentielle de base 1,21.

   (b) En notant f cette fonction, combien vaut $f(x + y)$ d'après la question 4)c).

Annexe 4 : Transcriptions du discours de l'enseignant en Terminale S, pour justifier l'approximation dans la méthode d'Euler

Extrait 1 : On part d'un point de la courbe, un point dont on est sûr et on va tracer la tangente. […] La tangente et la courbe sont quasiment similaires.

Extrait 2 : (obtention du premier point par la méthode d'Euler)
Ca nous donne un point qui est presque sur la courbe puisqu'on a dit que la tangente est relativement proche de la courbe. Ca veut dire que le point que j'obtiens sur la droite est relativement proche du point que je devrais obtenir sur la courbe.

Extrait 3 : (P montre la courbe de la fonction exp sur Geogebra) Est-ce que vous trouvez que c'est assez proche de la fonction qu'on était en droit d'attendre ?
un élève : bof !
Ouais, bof ! ça a a bonne forme quand même ! Quel est le problème ? [él…] oui, on accumule les imprécisions. Quand on prend comme point de départ M1, c'est embêtant car M1 est déjà faux, imprécis. Donc si on reprend comme point de départ un point imprécis, on accumule les erreurs. Comment est-ce qu'on avoir un point M1 un peu plus précis ?
un élève : en diminuant le pas.
En diminuant le pas, ouais. D'accord ? si vous vous mettez un peu plus près de M0, vous allez être moins faux. D'accord ? ça reste quand même imprécis malgré tout. Et donc en diminuant le pas on devrait avoir quelque chose de plus précis.

Extrait 4 : (un élève au tableau écrit un programme pour la méthode d'Euler)
On a fait tout ce calcul on arrive ici. Pourquoi est-ce que ce y là on peut se permettre de dire, ben ok c'est f(a) ?
élève : …
La différence est que ce n'est pas tout à fait égal, c'est une approximation […] l'image sur la tangente c'est presque la valeur de la fonction, l'image de la fonction en a, d'accord ? c'est une valeur approchée. Mais ici on est obligé de faire une affectation, on peut pas écrire environ, un ordinateur ne peut pas comprendre ça. Alors on lui dit, l'image que tu as trouvé, c'est f(a).

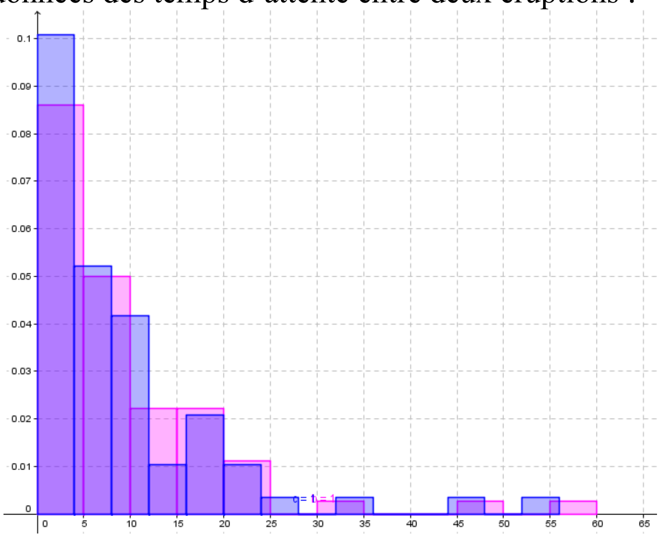
Annexe 5 : Enoncé du problème de probabilité

Le volcan Aso, situé sur l'île de Kyushu au Japon, est l'un des plus actifs au monde. On possède les statistiques de ses éruptions, régulièrement tenues depuis le XIIIè siècle. Nous avons, dans le document tableur, les années d'éruptions jusqu'au XIXè siècle (à partir du XXè siècle, les données, d'une autre nature, ne sont pas compatibles (*)).

Années des 73 éruptions du volcan Aso du XIIIe au XIXe siècle

Donnée n°	Année	Temps d'attente		Donnée n°	Année	Temps d'attente
1	1229			34	1562	4
2	1239	10		35	1563	1
3	1240	1		36	1564	1
4	1265	25		37	1576	12
5	1269	4		38	1582	6
6	1270	1		39	1583	1
7	1272	2		40	1584	1
8	1273	1		41	1587	3
9	1274	1		42	1598	11
10	1281	7		43	1611	13
11	1286	5		44	1612	1
12	1305	19		45	1613	1
13	1324	19		46	1620	7
14	1331	7		47	1631	11
15	1335	4		48	1637	6
16	1340	5		49	1649	12
17	1346	6		50	1668	19
18	1369	23		51	1675	7
19	1375	6		52	1683	8
20	1376	1		53	1691	8
21	1377	1		54	1708	17
22	1387	10		55	1709	1
23	1388	1		56	1765	56
24	1434	46		57	1772	7
25	1438	4		58	1780	8
26	1473	35		59	1804	24
27	1485	12		60	1806	2
28	1505	20		61	1814	8
29	1506	1		62	1815	1
30	1522	16		63	1826	11
31	1533	11		64	1827	1
32	1542	9		65	1828	1
33	1558	16		66	1829	1
				67	1830	1
				68	1854	24
				69	1872	18
				70	1874	2
				71	1884	10
				72	1894	10
				73	1897	3

Histogrammes des données des temps d'attente entre deux éruptions :



Annexe 6 : Transcription de la séance sur les probabilités

> *On cherche une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ qui approche « au mieux » l'histog.*

Les élèves travaillent individuellement. Marie passe dans les rangs.

Marie (à un élève) : Non, on en fait une.
[...]
Marie : Vas-y, propose. Moi j'ai dit on propose, alors on propose.

Marie (à la classe) : Oui, alors, si je vous ai donné un document écrit, c'est pour que vous puissiez faire au crayon de papier des trucs dessus. Je vous en redonnerai un autre après si vous voulez, plus propre, quand vous aurez fini de bidouiller.

Marie (à l'élève B23) : Alors tu veux un truc comme ça. D'accord. Et ça, ça aurait quel genre d'expression, B23 ?
Elève B23 : Une fonction inverse.
Marie : Alors, propose-moi un truc, là, un machin avec des nombres enfin… Donne-moi l'expression de ta fonction, quoi. Tu me dis c'est du genre fonction inverse, ok. Alors, c'est $1/x$, c'est $f(x) = 1/x$?
[...]
Marie : A ton avis ? Non ? Donc il faut que tu bidouilles un peu pour que tu… $1/x$, elle coupe pas l'axe des ordonnées.
Elève B23 : Ah ok.
Marie : Ah voilà. Donc… Débrouillez-vous.

Marie (à d'autres élèves) : Là, vous avez pas envie de dessiner un truc les filles ? Allez-y, prenez votre crayon papier, lâchez-vous.

Marie (à l'élève B32) : Alors, B32, c'est quel genre de truc ça ?
[Inaudible].
Marie : Moi je propose une fonction…

Marie (à un autre élève) : Alors ? Elle te plaît pas ? Tu veux quoi comme histogramme ? Quelle largeur ? Peut-être que je l'ai sous le coude, je sais pas. Bon celui-là te va.
[...]

Marie (à toute la classe) : Je veux voir une expression de fonction écrite sur toutes les feuilles quand même. Tout le monde est capable de me faire une proposition. En tout cas de forme, d'accord.

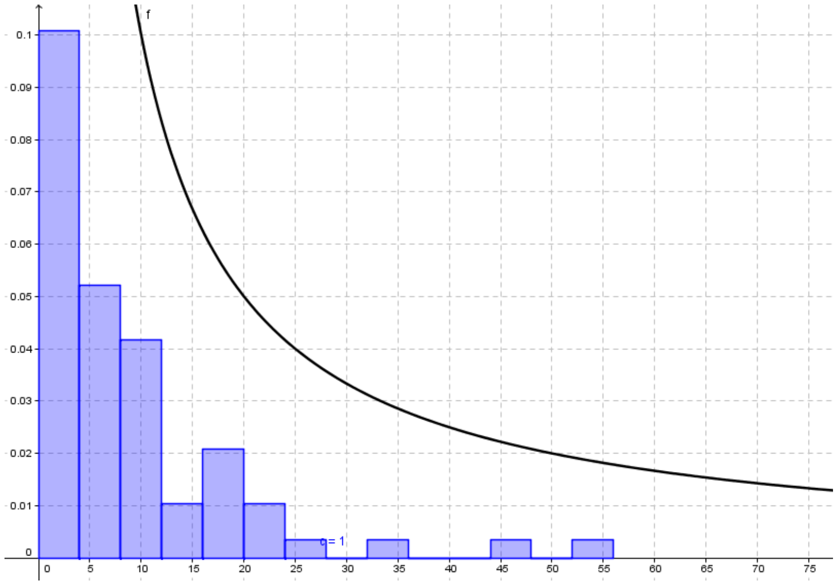
[...]
Marie : Ça n'a pas de sens. Qui c'est qui dit des bêtises ? Bravo, ça sert à rien. Encore que…
Elève A42 : C'est juste qu'il me demandait comment on calculait l'aire sous la courbe…
Marie : Ça c'est pas une réponse, ça. La réponse n'est pas une bonne réponse.
Elève A42 : Non, mais c'est…
Marie : Donc ça sert à rien.
Elève A42 : Oui, mais c'est… Il disait…
[...]

Marie (à l'élève A52) : Attends déjà, déjà si on trouvait la courbe.
Elève A52 : Oui mais d'accord…
Marie : On a dit, A52, un problème à la fois.
Elève A52 : Et après ?
Marie : Et après, on va chercher.

[...]
Elève A52 : Mais comment calculer l'aire sous une courbe ?
Marie : On verra ça après. On va s'y mettre. Tu nous fais pas confiance. Tu penses qu'on n'y arrivera pas ?
[...]
Marie : Mais oui, moi j'ai foi. Je sais qu'on va y arriver tous ensemble.

[...]

[39:50] *Reprise de la discussion collective. Marie s'installe à son bureau pour utiliser GeoGebra.*

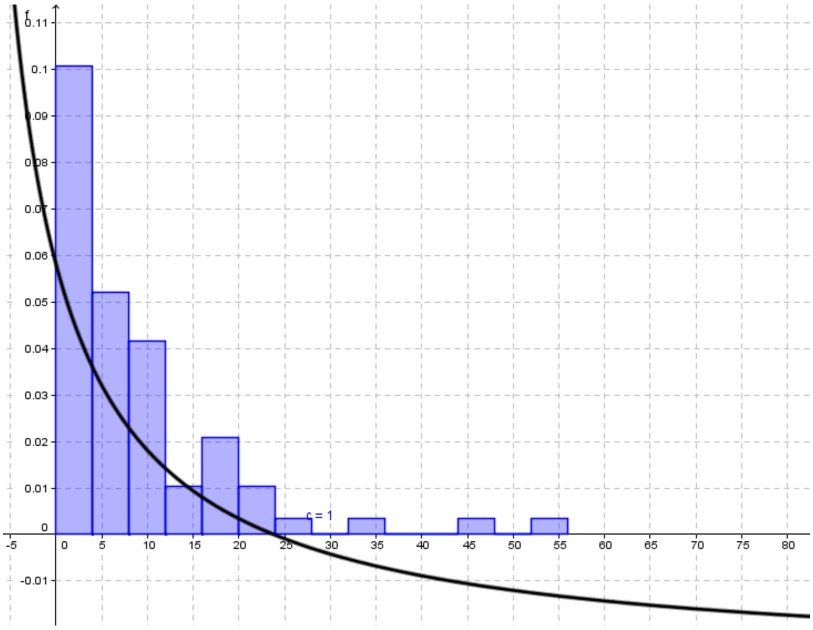


Marie : Alors.
Marie : B53 ?
Elève B53 : Il faut la…
Marie : C'est… T'as écrit ? Alors, première proposition.
Marie efface le tableau.
Marie : Alors, sur beaucoup de feuilles j'ai vu… En fait pour l'instant, je n'ai vu que ça. Proposition une, un truc du genre $1/x$.
Marie écrit au tableau en même temps qu'elle parle.

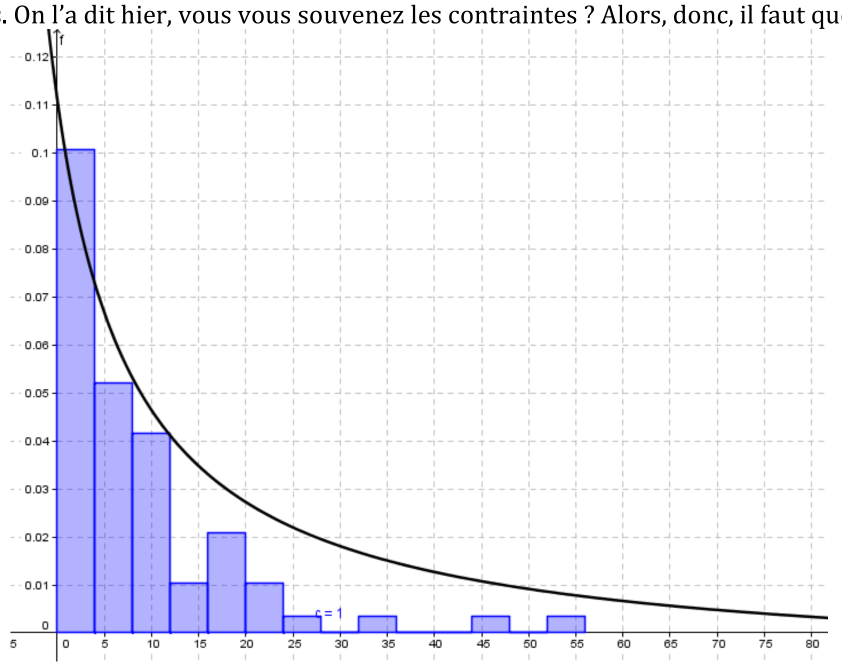
Prop 1

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

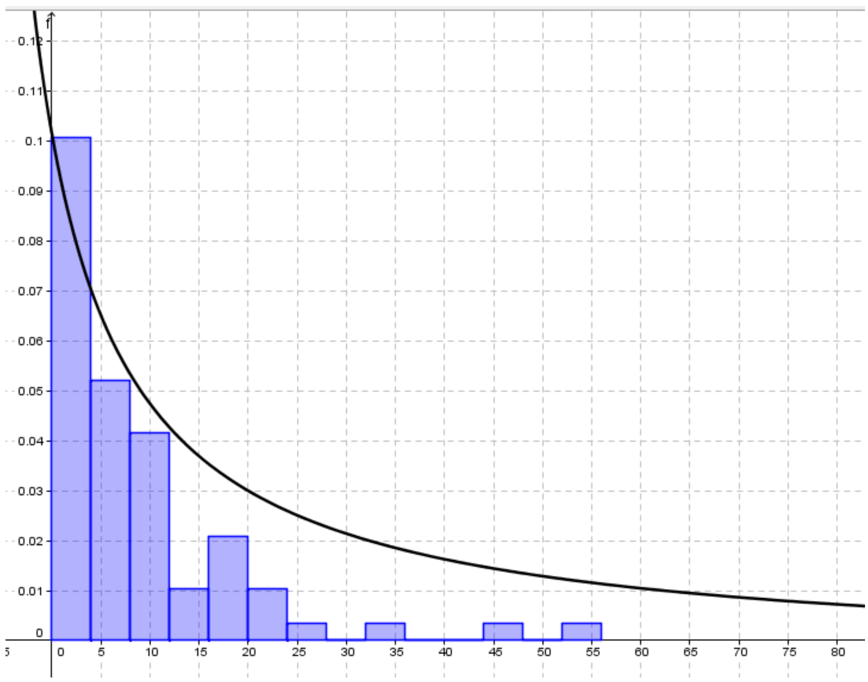
Une élève ne semble pas d'accord.
Marie : Non, mais c'est une famille… de fonctions. Alors, c'est clair que $1/x$, ça va pas être ça.
Elève B53 : Non.
Marie : Donc tu veux qu'on la…
Elève B53 : Voilà.
Marie : Ca veut dire quoi qu'on la… ?
Elève B53 : On la décale vers le bas.
Marie : Tu veux que je la décale vers le bas.
Marie retourne sur le logiciel GeoGebra.
Marie : Ah oui, c'est sûr, c'est plus facile que sur le papier.
Rires.
Marie : Alors, je la décale… [*Marie déplace la courbe avec le curseur*]. Alors oui mais est-ce que je peux la décaler… ? Regardez bien ce qui se passe partout parce que…



Elève A11 : Non, pas là, pas là.
Marie : Pourquoi je peux plus faire ça ?
Plusieurs élèves : Parce qu'elle est négative.
Marie : Parce qu'elle est négative. On a dit qu'on cherchait des fonctions ?
Plusieurs élèves : Positives.
Marie : Positives. On l'a dit hier, vous vous souvenez les contraintes ? Alors, donc, il faut que je la remonte.



Elève A52 : Ah là, c'est bien.
Marie : Oui mais…
Elève B31 : Faut la décaler sur la gauche.
Marie : Faut la décaler vers la gauche.
Tous les élèves ne sont pas d'accord, certains trouvent que c'est bon, d'autres qu'il faut encore décaler.
Marie : Pas tous en même temps. Attendez. Je vais bouger un truc. Attendez, attendez, attendez. Criez pas. Voilà.
Marie : Alors ?
[…]



Marie : C'est bon là ? J'arrête ? Je continue ? Je fais quoi là ? Vous êtes contents ou pas tant ?

Elève C41 : Il faut un nombre entier. Ah il faut peut-être… Là, c'est bien.

Marie : Là c'est bien ? B53, c'est toi qu'avait proposé ça, tu me dis stop parce que là…

Marie bouge la courbe sur GeoGebra.

Marie : B53 ?

[…]

Marie : Alors, je la reprends. Donc on la laisse au-dessus de l'axe des abscisses quand même et tu veux que je la décale vers la… par… enfin vous voyez ce que je veux dire.

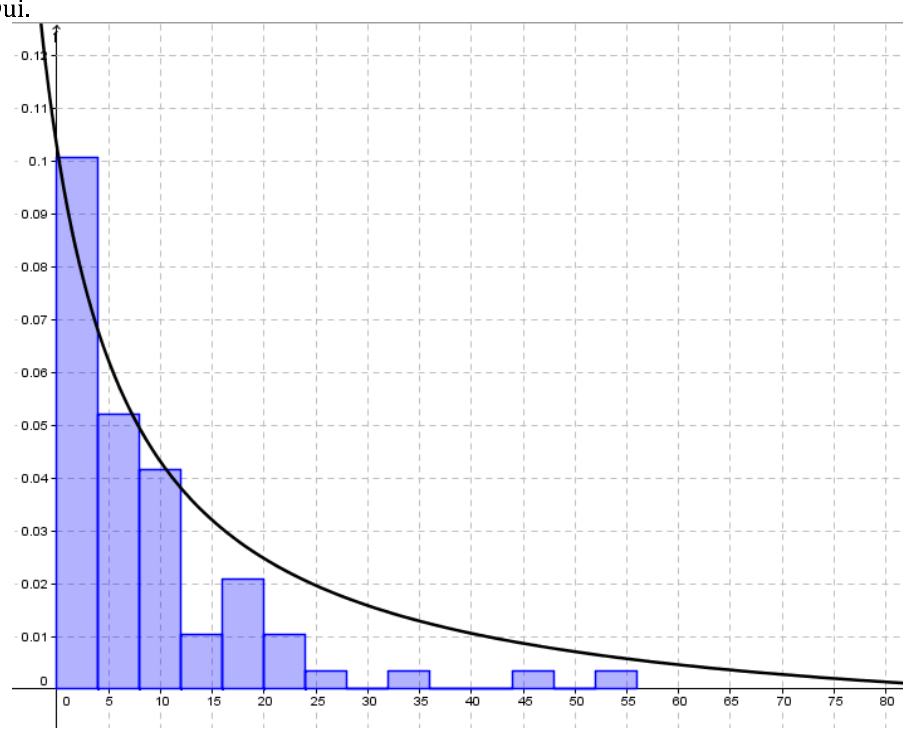
Elève B53. Où est-ce que le maximum…

Marie : Où est-ce que tu veux que je la décale, B53 ?

Elève B53 : A peu près là.

Marie : A peu près là ?

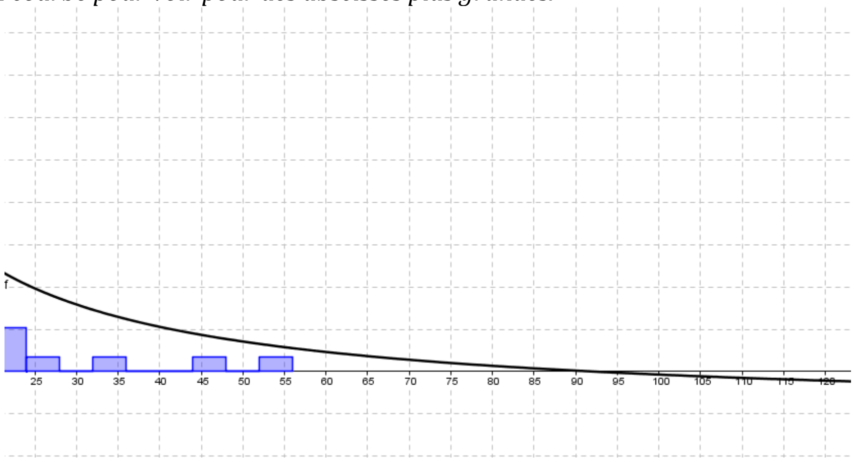
Elève B53 : Oui.



Tous les élèves ne semblent pas d'accord.

Marie : Oui, c'est vrai que c'est pas…

Elève B52 : Oui là c'est bien.
Elève B42 : Moi je dirais que faut la remonter.
Marie : Là, ça vous plait ?
Plusieurs élèves ont l'air d'accord.
Elève A32 : Oui. Moi ça me plait.
[...]
Marie (à l'attention d'une partie de la classe) : [...] Est-ce qu'elle, elle vous plait ?
Plusieurs élèves de ce coin de classe ont l'air d'accord.
Marie : C52 ?
Elève C52 : Non, pas tout à fait.
Marie : Pas trop. Pourquoi ?
Elève C52 : parce qu'elle va peut-être couper… elle va couper l'axe des abscisses si on va très vers la droite.
Marie : Oui, si on va très très très vers la droite tu veux dire.
Elève C52 : Ca va dépasser.
Elève A52 : Oui mais bon…
Marie déplace la courbe pour voir pour des abscisses plus grandes.



Elève A52 : Il a raison. On voit le métier.
Rires.
Marie : Bon, alors. C'est… Vous…
Marie : Les hyperboles… Enfin c'est pas un secret, ça s'appelle une hyperbole, on est d'accord ? En tout cas, il y a une branche qui nous intéresse.
Marie : Il y a que le problème que ça coupe l'axe des abscisses qui vous gêne ?
Plusieurs élèves parlent en même temps.
Marie : Donc on en voudrait une qui coupe pas l'axe des abscisses, qui reste au-dessus. C'est quoi la forme générique, là ?
Marie : La forme canonique pour une hyperbole ?
Une élève : Ah…
Marie : Ah. Vous vous souvenez pas ? C'est quoi ? Vous savez pour les suites quand vous voulez… étudier le… B31 ?
Elève B31 : C'est α…
Marie : α. Oui.
Elève B31 : α+β sur…
Marie : Oui alors α et β, on va pas pouvoir faire… On va mettre des lettres… Alors α sur ? Tu te souviens pas ?
Elève B31 : $x +$ …
Marie : On va mettre des lettres… $bx + c$ et d. Cette forme-là.
Marie écrit au tableau en même temps.

<u>Prop 1</u>

$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = d + \frac{a}{bx + c}$$

Elève A42 : Ah oui.

Marie : Bon… Il faut que la limite en $+\infty$, il faut que ça fasse quoi de notre… fonction ?

Deux élèves répondent $+\infty$, d'autres 0.

Marie : Non. Zéro. Si c'est $+\infty$, ça va remonter. Donc si on veut que la limite de f en $+\infty$, ça fasse 0, qu'est-ce qu'il faut qu'on impose ?

Plusieurs élèves parlent en même temps.

Marie : Donc ça, ça tend vers ? Ça, ça tend vers quoi lorsque x tend vers $+\infty$? [*Marie montre le dénominateur*].

Plusieurs élèves répondent $+\infty$.

Marie : En tout cas, vers un infini. Ça, ça tend vers ? [*En montrant le quotient*].

Une élève répond $+\infty$, d'autres 0.

Marie : Zéro. Ça, ça tend vers un infini, son inverse vers zéro donc ça tendra vers ?

Plusieurs élèves répondent 0.

Elève A42 : Vers d.

Marie : Vers d. Donc il faut que d soit égal à quoi ?

Plusieurs élèves répondent 0.

Marie : A zéro.

Marie écrit au tableau.

Prop 1

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = d + \frac{a}{bx + c}$$

$$\lim_{+\infty} f = 0 \qquad d = 0$$

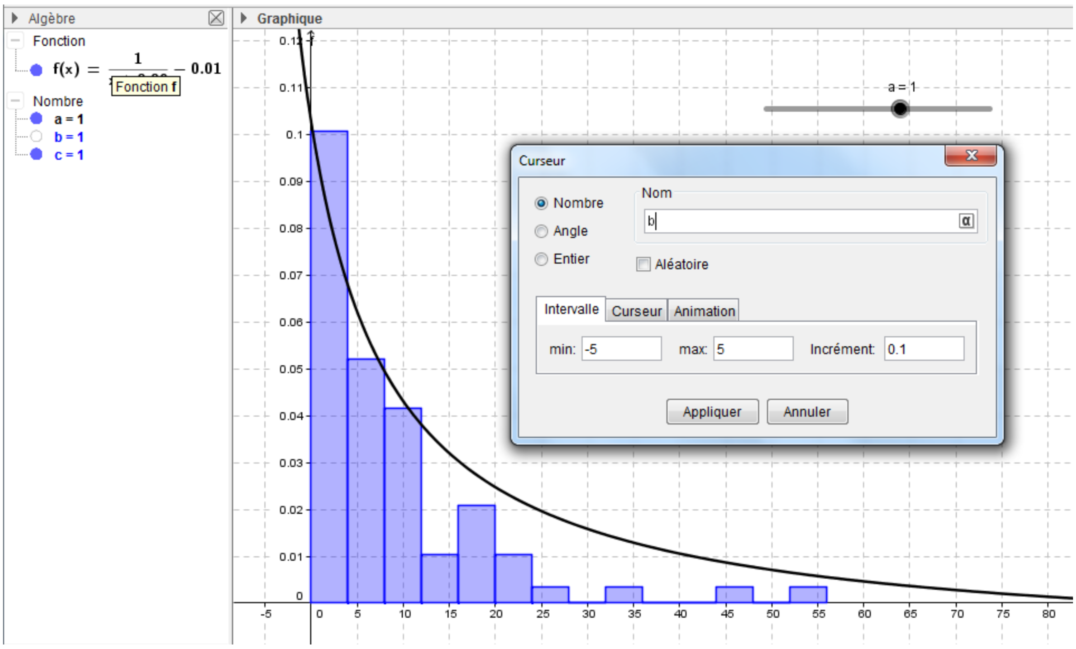
$$f(x) = \frac{a}{bx + c}$$

Marie : Donc il reste que ça. [*En montrant le quotient*]. Quelque chose de ce genre. Alors. L'avantage du logiciel… […]

Marie manipule le logiciel pour insérer des curseurs.

Marie : Curseur. Alors, attendez, on va l'appeler a.

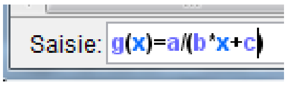
[…]



Marie : On y va. Je l'appelle $g(x)$ égale… J'ai mis quoi déjà, dans quel ordre ? J'ai mis a

Un élève dicte.

Marie : a sur $bx + c$.

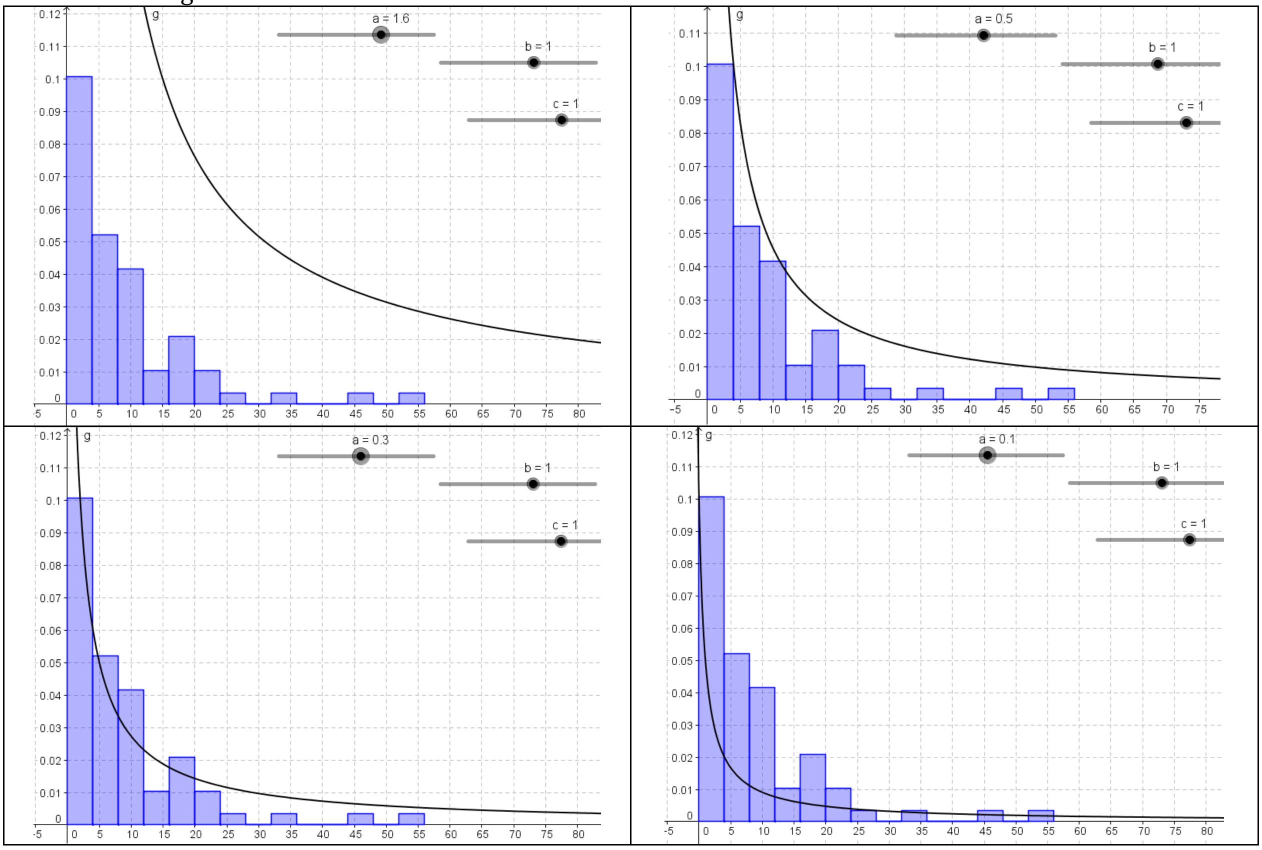


Marie : On va supprimer celle-ci. Alors ? Qu'est-ce qui se passe quand je bouge a ? On va les garder positifs.

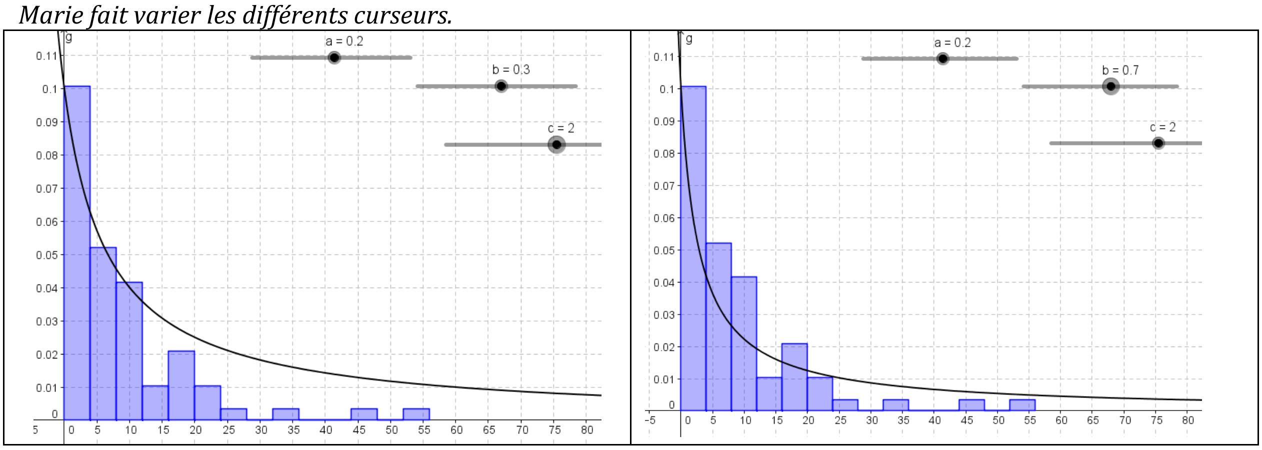
Marie fait varier le curseur a.

[...]

Marie : Ca bouge vite.



Marie fait varier les différents curseurs.



Pendant ce temps, certains élèves ont une discussion autour la fonction tracée.

Une élève : Il y a trop de trucs en haut.

Elève B31 : Non, puisque après c'est jusqu'à +∞.

Elève A52 : Ah. Oui sauf que… il y aura jamais…

Elève C41 : C'est pas grave si elle touche jamais ?

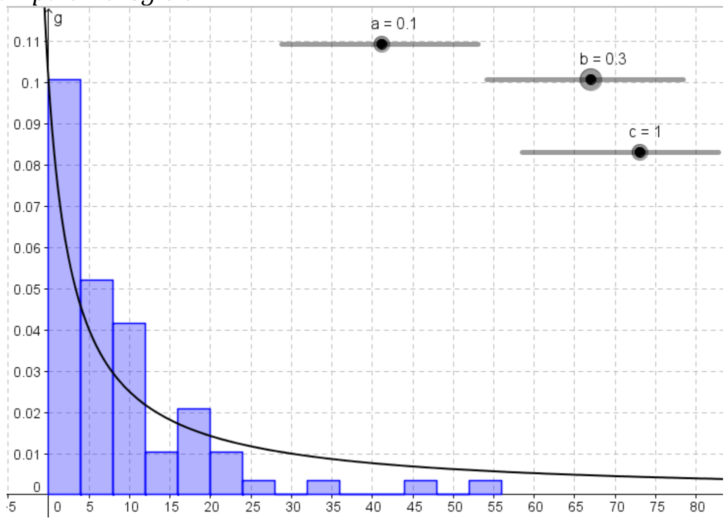
Elève A42 : Il faut des temps d'attente de ouf (sic) avant.

Elève B31 : Oui c'est ça justement. Comme il y aura plein de trucs blancs, ça compense… le bleu.

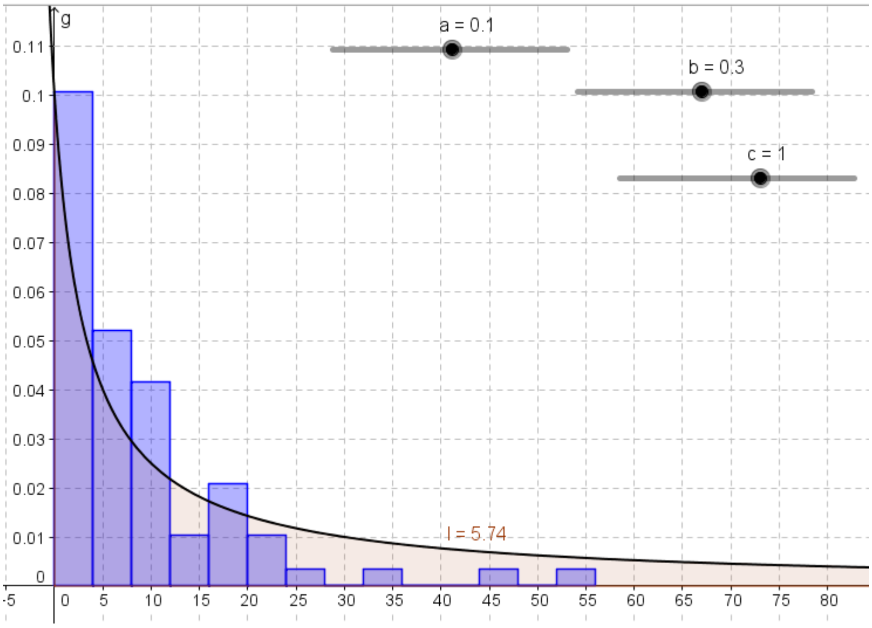
Elève B52 : Il était peut-être en éruption.

Elève A42 : Oui, je suis d'accord, la fréquence elle peut être… [*Inaudible*].

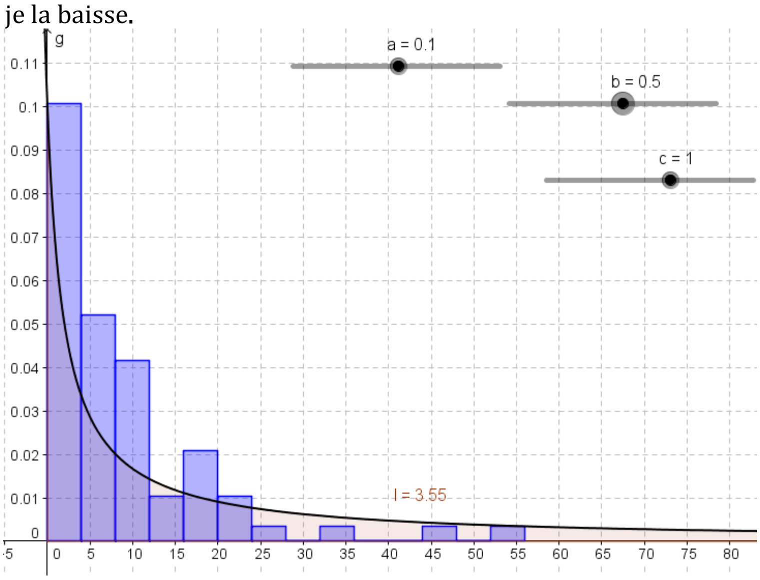
Marie a terminé de manipuler le logiciel.



Marie : Alors, est-ce que nos hyperboles on y arrive ou pas ? Est-ce que… est-ce que ça vous satisfait ?
Elève A42 : Il y a beaucoup de trucs au-dessus de la courbe.
Elève A52 : Mais comme B31 a dit.
Marie : J'ai pas entendu ce qu'a dit B31.
Elève A52 : Ah c'est pas grave.
Marie : Qu'est-ce qu'elle a dit ?
[…]
Elève B31 : J'ai dit que c'était pas grave si y avait beaucoup de bleu parce que comme après, ça va jusqu'à l'infini il y aura plein… Donc si il y a du bleu, ça se compensera après.
Marie : D'accord. Le morceau que j'ai mangé ici…
Elève B31 : Oui.
Marie : […] Le morceau que j'ai mangé ici, tu veux dire c'est pas grave parce qu'on le retrouve… C'est ça ? Ça va compenser…
Elève A42 : Oui mais du coup, c'est pas au bon endroit.
Marie : Rappelez-moi, il y avait une autre contrainte sur la courbe qu'on cherche quand même. C'est quoi ?
Elève B31 : L'aire c'est 1.
Marie : L'aire doit faire…
Plusieurs élèves répondent 1.
Marie : 1.
Elève A52 : Ah oui, oui. Du coup, ça marche pas si on met $+\infty$.
Elève C41 : Faut que ça touche.
Elève A52 : J'avais raison, alors.
Marie : Ah non, pourquoi tu dis ça ?
Rires.
Elève A52 : Parce que c'est une forme… parce que c'est une forme qui n'est pas finie.
Marie : Et qu'est-ce que… Alors, tu veux dire que parce que…
Elève A42 : On l'a vu, on l'a vu. L'aire elle grandit…. Ah oui, c'était un DM.
Marie : Oui. Il y en a un qui fait les DM.
Rires.
Marie : On a vu, A52, que c'était pas un problème. Qu'on pouvait avoir un domaine infini et une aire…
Elève A52 : C'est pas ça, c'est pas ça. C'est pas une forme parce qu'il n'y a pas de fermeture.
Marie : Oui mais non plus, dans les rectangles y avait pas de fin… On les continuait à l'infini. Moi j'en avais dessiné 4, mais la figure elle était infinie. Pense à ton périmètre du flocon de Von Koch, c'est pareil. Donc c'est pas ça le problème. Alors le logiciel est sympa, parce qu'il calcule les aires sous la courbe.
Marie entre dans la barre de saisie la commande avec intégrale (mais les élèves ne voient pas cette commande).
Marie : Alors, on va mettre un truc très très grand. D'accord ?
Elève A52 : Mais comment on peut calculer l'aire d'un truc comme ça ?
Marie : Un problème à la fois, A52. Moi je suis mono-tâche.



Marie : Ah, regardez, il est là. J'ai calculé l'aire entre 0 et… je sais pas quoi. 10 millions, 100 millions. Et ça fait 4… 5,74 déjà.
Marie : Donc ?
Elève B31 : Faut baisser encore.
Marie : On baisse encore.
Marie manipule à niveau le logiciel.
[…]
Elève B53 : En fait faut qu'on trouve l'équation pour que ça fasse 1.
Elève B52 : Ah oui, on pourrait résoudre une inéquation.
Petit bug avec le logiciel.
[…]
Marie : Tu veux que je la baisse.



Elève B52 : Oui mais là ça devient n'importe quoi.
Elève B31 : Là on est à combien là ?
Plusieurs élèves répondent 3,55.
Marie : 3,55 c'est pas 1.
Plusieurs élèves parlent en même temps.
Elève B52 : On se rapproche de 1. Elle tend vers 1.
Marie : Non mais attendez, elle s'approche de 1, mais moi j'ai mis jusqu'à 100 millions. Si je mets 10^{12}, qu'est-ce qui va se passer à votre avis ?
Plusieurs élèves répondent en même temps : « Ça sera encore plus », « Plus »,…
Marie : Ça sera trop grand. Ça va dépasser 1.

266 *Marie complète le tableau.*

Prop 1

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = d + \frac{a}{bx + c}$$

$$\lim_{+\infty} f = 0 \qquad d = 0$$

$$f(x) = \frac{a}{bx + c}$$

pb d'aire ss C_f

267