Le travail mathématique en Analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction[1]

Alain Kuzniak*, Elizabeth Montoya**, Fabrice Vandebrouck*, Laurent Vivier*
* Laboratoire de Didactique André Revuz (E4344), Université Paris Diderot, France.
** Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili.

INTRODUCTION

L'enseignement de l'Analyse apparaît tardivement dans le curriculum français en fin de scolarité obligatoire et, de fait, il touche relativement assez peu d'élèves. Ce nombre est encore plus restreint, si l'on considère que la véritable Analyse mathématique, dans sa forme la plus aboutie, n'est enseignée que dans les filières mathématiques du supérieur. Cependant, ce n'est pas parce qu'elle est rejetée aux confins de l'enseignement que les élèves ne sont pas confrontés tout au long de leur scolarité à des questions et à des problèmes relevant de l'Analyse : les fonctions, les nombres réels, les suites, les aires, les limites font partie des notions rencontrées au lycée. Ainsi, si paradoxalement, et pour la plupart, ces élèves n'auront jamais accès aux réponses qui relèvent de l'analyse supérieure, il n'en demeure pas moins qu'ils développent un travail mathématique spécifique relatif à ce domaine mathématique : l'absence de la forme la plus élaborée et sophistiquée de ce travail ne signifie pas absence de travail mathématique. Il en va de même en géométrie, où l'ignorance des bases abstraites de la géométrie affine euclidienne ne supprime pas tout travail géométrique. Quelle forme revêt alors le travail mathématique en Analyse au Lycée et au début de l'enseignement supérieur ? Comment se négocient les transitions entre des formes de travail a priori bien différentes ? L'identification de ce travail mathématique sous ces différentes formes est complexe et elle va de pair avec une réflexion didactique sur sa construction dans la scolarité qui permette de surmonter certaines des difficultés qui apparaissent notamment lors de l'étude des limites et des fonctions dans tous les pays où ces notions sont introduites (Artigue 1998).

Pour notre étude, nous utiliserons le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) qui a précisément pour ambition de permettre l'analyse et la description du travail mathématique effectif des sujets confrontés à des tâches mathématiques dans le cadre scolaire. Après une mise au point sur ce cadre méthodologique et théorique, nous étudierons à la lumière de ce modèle la question de l'identification et de la construction des ETM de l'Analyse à la fin du secondaire et au début du supérieur. Cette ambition s'appuie d'une part sur nos recherches dans le cadre d'un projet de collaboration ECOS France-Chili entre le Laboratoire de Didactique André Revuz à Paris et la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso au Chili et, d'autre part, sur un ensemble de recherches menées dans ces deux équipes : Habilitation à Diriger des Recherches de Vandebrouck et Vivier et, de thèses en cours (Derouet, Menares, Rousse, Verdugo, Gaona, Loeng). Certaines de ces recherches ont été initiés dans le cadre de la commission Inter Irem Université. Tous ces chercheurs ne partagent pas nécessairement les mêmes cadres théoriques mais leur unité provient de recherches en commun sur la question de l'enseignement de l'Analyse au lycée et au début de l'université. Ce travail de recherche est en cours et cette présentation à l'école d'été en rend compte tout en contribuant aussi à son développement.

Après une présentation du cadre général des Espaces de Travail Mathématique, nous dégageons quelques-uns des éléments fondamentaux pour notre approche de la didactique de l'Analyse : les paradigmes de l'Analyse, les perspectives de localité, la dialectique discret-

[1] Ce travail est suporté par le projet ECOS-Sud C13H03.

continu et la question des articulations entre genèses. Une fois ces points établis, nous nous attachons à la description de la rupture existant entre les différents ETM existant au lycée et à l'université avec un regard particulier sur l'enseignement des fonctions.

LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE (ETM)

1. Le travail mathématique dans le cadre de la scolarité

Introduire la notion de travail dans le cadre de l'enseignement n'est pas anodin car cette notion suppose une sorte de nécessité de production qui s'oppose à la vision d'une école désintéressée. Mais quel sens donner aux activités des élèves en mathématiques si rien ne les oriente vers un objectif général, un motif au sens des théories de l'activité, qui les subsume ? Dès les premiers travaux en didactique des mathématiques, certains chercheurs ont considéré l'élève comme un « mathématicien en herbe » et ainsi érigé comme modèle pour l'élève, l'activité du mathématicien expert. Ces réflexions ont débouché sur des formes d'enseignement ambitieuses telles que celles développées dans le cadre du débat scientifique (Legrand, 1990). L'élève n'est pas simplement vu comme un apprenant parcourant avec application le chemin balisé des exercices scolaires mais comme un chercheur explorant le domaine mathématique. Mais en quoi consiste exactement cette activité spécifique qui fait reconnaître le mathématicien ? Freudenthal (1971) s'essaie à la définir en s'adressant à une communauté de mathématiciens :

> « What is mathematics? Of course you know that mathematics is an activity because you are active mathematicians. It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. » (Freudenthal 1971, p. 414)

Il définit ainsi les mathématiques ou plutôt l'action du mathématicien comme l'activité de résolution et de recherche de problèmes qu'on suppose mathématiques mais aussi comme une activité d'organisation d'un domaine spécifique. Ainsi, donc le travail du mathématicien résulte de son activité en tant que mathématicien ! La manière la plus contemporaine de comprendre ce travail a sans doute été donnée par Thurston dans son lumineux « On proof and progress in mathematics » (1994) article dont Hacking (2014) livre une analyse après avoir précisé que, selon lui, sa lecture devrait être obligatoire pour toute personne s'intéressant à la philosophie des mathématiques (p. 61).

La difficulté de définir aisément et directement les mathématiques tient pour Thurston (1994) au caractère essentiellement récursif de l'activité mathématique et il propose ainsi de définir les mathématiques comme le plus petit sujet satisfaisant aux conditions suivantes :

- Les mathématiques incluent les nombres entiers et la géométrie du plan et des solides ;
- Les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient ;
- Les mathématiciens sont ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques.

Il ne sera donc possible d'accéder à ce travail qu'en le faisant et en y ajoutant sans cesse de nouvelles notions. Le parcours de l'élève ou de l'étudiant devra suivre cette incertaine genèse d'une pensée qui se nourrit de chacune de ses expériences antérieures. Par chance, son chemin sera doublement balisé d'une part par le travail antérieur de tous les mathématiciens qui l'ont rendu praticable et compréhensible mais aussi par celui de ses enseignants qui vont en aménager les accès et l'aider à constituer son propre Espace de Travail Mathématique.

2. Le modèle des Espaces de Travail Mathématique

Le modèle des ETM prolonge celui des Espaces de Travail Géométriques (ETG) et nous ne reprendrons pas ici en détail sa description qui a déjà été présentée lors de la quatorzième école d'été et dont les évolutions récentes ont fait l'objet de présentation dans Kuzniak (2011) et Kuzniak et Richard (2014).

Nous rappelons seulement certains éléments qui nous paraissent essentiels pour la suite et dont certains devront être spécifiés en fonction du domaine particulier que nous étudions ici à savoir celui de l'Analyse mathématique. Par ETM, nous désignons un environnement pensé et organisé pour permettre le travail des individus résolvant des problèmes mathématiques. L'ETM est une structure évolutive destinée à accueillir les activités mathématiques. De la distinction féconde établie dans les théories de l'activité entre tâche et activité, nous retenons que cette évolution dépendra des tâches prescrites à un individu et des activités qu'il développera. Dans le cas des mathématiques scolaires, ces individus ne seront généralement pas des experts, mais des élèves ou étudiants, confirmés ou débutants.

> « De l'étude particulière de la géométrie, nous retenons le principe d'articuler dans l'ETM deux niveaux, l'un de nature épistémologique, en rapport étroit avec les contenus mathématiques du domaine étudié, et l'autre, de nature cognitive, qui concerne la pensée du sujet résolvant des tâches mathématiques. » (Kuzniak & Richard, 2014).

Le travail mathématique résulte alors d'un processus qui va permettre de donner progressivement un sens, d'une part, à chacun des niveaux épistémologique et cognitif avec des circulations et, d'autre part, d'articuler ces deux niveaux grâce à différentes genèses. L'ensemble du processus est décrit par le diagramme suivant.

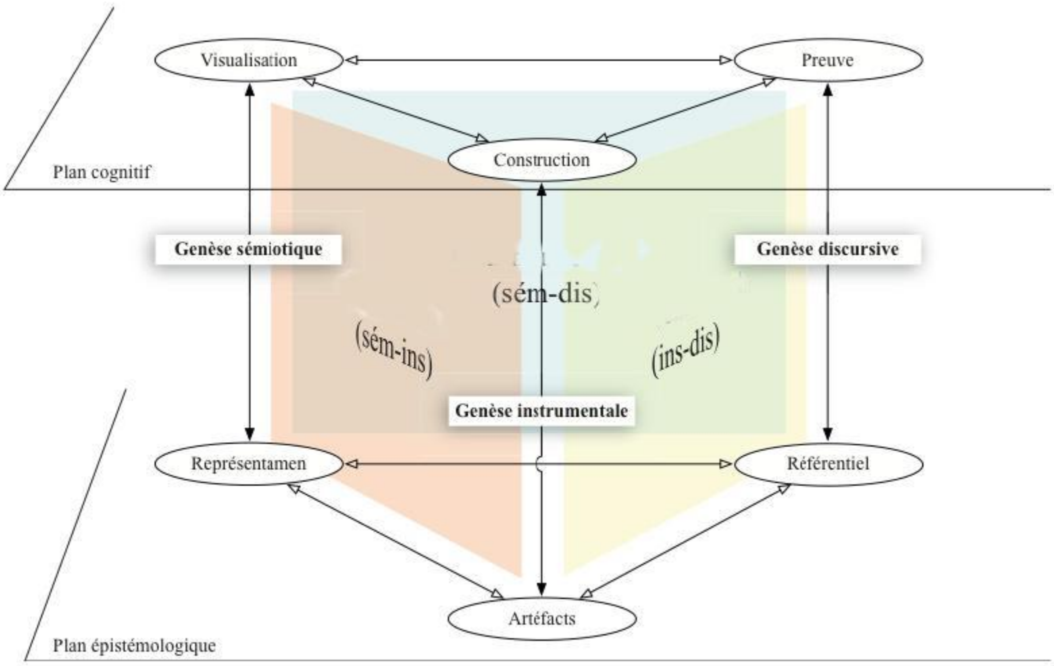

Figure1. *Le diagramme des Espaces de Travail Mathématique*

De fait, ce modèle privilégie un certain nombre de dimensions considérées comme centrales dans le travail mathématique : une dimension sémiotique liée aux signes et représentations, une dimension instrumentale en relation avec des outils de construction ou de calcul, une dimension discursive pour produire une preuve s'appuyant sur des propriétés organisées dans un référentiel théorique. La dynamique du travail mathématique mis en œuvre par le professeur dans sa classe (ETM idoine) sera décrite à travers des cheminements à l'intérieur de ce modèle. Afin de rendre compte de la complexité de ces relations, Coutat et Richard (2011) se sont appuyés sur les plans verticaux ([Sem-Ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis]) qui apparaissent dans le modèle et qu'ils ont relié aux différentes phases du travail mathématique : découverte et exploration, justification et raisonnement, présentation et communication. Ces ETM idoines dépendent du professeur et sont à mettre en relation avec les ETM de référence proposés par les institutions d'enseignement et avec les ETM personnels des élèves.

3. Nos questions dans ce modèle

Le modèle de l'ETM, conçu comme une structure d'accueil des activités, est organisé autour des plans épistémologique et cognitif. Il doit pouvoir être un outil d'analyse (tant a priori qu'a posteriori), de description de tâches et d'interprétation des activités. Pour une tâche donnée, le modèle doit permettre d'identifier les circulations, les parcours à l'intérieur d'un ETM ou entre deux ETM, il doit aussi permettre de repérer les mises en résonance possibles des trois genèses, sémiotique, instrumentale et discursive.

3.1 Les entrées dans le travail

Du point de vue sémiotique, les problèmes mettent en jeu une grande diversité de registres de représentation d'une manière spécifique à l'Analyse. Quels sont les registres privilégiés et de quelle façon sont-ils ou non coordonnés ? Quelle est la nature particulières des traitements internes aux registres ou des conversions entre ces registres ? Comment les jeux entre local et global ou entre discret et continu sont-ils pris en compte?

Du point de vue instrumental, l'Analyse enseignée se nourrit de l'apport de logiciels et d'outils qui facilitent à la fois le calcul et la construction de graphiques mais aussi l'exploration et la découverte de ces objets. Quelle modification sur les ETM entraîne cette introduction massive d'outils technologiques à la fois dans la gestion de la classe et le développement du travail personnel des élèves ?

Quelle entrée dans la preuve dans cet ETM riche en signes et logiciels ? Comment le discours de preuve se structure-t-il ? Et sur quel référentiel théorique s'appuie-t-il ?

3.2 Les éventuels blocages et ruptures dans certaines genèses

La richesse potentielle des ETM de l'Analyse entraîne de fait une complexité cognitive qui peut aboutir à des blocages ou à des formes restreintes de travail dans un des plans verticaux que nous avons signalés précédemment. Une des formes les plus attendues de ce confinement dans une dimension du travail est certainement celle qui consiste à laisser aux élèves le soin d'explorer les objets, d'émettre des conjectures mais de laisser de côté les démonstrations. D'une autre manière, retrouve-t-on en Analyse ces glissements de domaines mathématiques qui font que les élèves se concentrent sur des tâches souvent restreintes à l'application de techniques de calculs n'ayant parfois plus aucun rapport avec le savoir visé ?

3.3 Rôle du professeur dans les circulations et la mise en évidence d'un relief particulier dans les ETM.

Nous avons souligné que le travail mathématique en Analyse se particularisait par la grandes diversité des représentations sémiotiques, des techniques et des méthodes de calcul. Comment le professeur guide-t-il les élèves dans ce foisonnement d'outils, sur quels objets ou méthodes met-il l'accent ? Enfin, qu'est-ce qui pilote globalement le travail dans cet ETM?

Pour aborder toutes ces questions, nous partirons de la description de tâches emblématiques donnant une idée de certains ETM comme celui des fonctions. Il s'agira ensuite à partir de cet ensemble de résultats de reconstituer un ETM global auquel on n'a accès que partiellement mais ce phénomène est classique en didactique des mathématiques.

LES PARADIGMES DE L'ANALYSE

1. Introduction

Il est difficile de penser l'Analyse mathématique comme un champ d'étude autonome et à part entière tant les liens avec les autres domaines mathématiques sont importants et les connaissances anciennes y sont nécessaires. L'Analyse présente deux facettes assez communes dans le développement des mathématiques : elle résulte d'un travail de modélisation de situations issues du monde réel et elle s'appuie également sur des objets qui peuvent avoir une autre nature mathématique, géométrique pour les courbes ou les aires ; algébrique pour l'écriture de nombreuses fonctions. Cette diversité à la fois des objets et de leur représentation est une source de conflit potentiel avec les habitudes de travail propres à ces domaines et de frictions avec des manières de voir et de raisonner qui doivent changer alors que les objets paraissent identiques comme nous le déclinons dans les trois TD associés à ce cours (le TD1 en relation avec les nombres, le TD2 avec l'aire et le TD3 avec la tangente).

Nous rendons compte de ces proximités et différences en développant les paradigmes spécifiques qui peuvent piloter le travail mathématique dans ce domaine mais aussi expliquer les interférences fréquentes avec d'autres domaines.

La notion de paradigme que nous utilisons est dérivée de celle introduite par Kuhn (1966) qui prend en compte à la fois les croyances des individus impliqués dans des groupes sociaux et la nature des théories scientifiques.

Dans son ouvrage sur la structure des révolutions scientifiques, Kuhn donne des paradigmes une définition qui privilégie deux aspects principaux :

- Tout d'abord, le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l’ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d’entreprendre la résolution d’un problème. Dans ce sens, Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d’un groupe qui travaille sur le même sujet.
- Dans un deuxième sens, intéressant dans une perspective d’enseignement, Kuhn caractérise les exemples significatifs et communs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique par les individus de ce champ disciplinaire. Dans notre cadre, nous qualifierons ces exemples de *situations paradigmatiques idoines* qu'il serait sans doute intéressant de rapprocher de l'idée de situation fondamentale.

Dans l’idée de Kuhn, les paradigmes permettent de donner une vision plus large de ce que l’on peut appeler une théorie commune en intégrant les membres de la communauté qui partagent cette théorie. Cela le conduit à étudier à la fois les signifiants de la théorie mais aussi les pratiques et les croyances des scientifiques qui travaillent dans le même domaine et ont adopté le même paradigme. Par contre, et cela est essentiel, les paradigmes n'incluent pas les problèmes eux-mêmes mais la manière de les envisager et de les considérer. Les paradigmes orientent ainsi le travail en modifiant le sens des objets étudiés. C’est ainsi qu’en Analyse, et dans un certain paradigme, il ne faudra pas se fier de manière exclusive aux informations et aux conclusions fournies par un travail géométrique sur des courbes. De même, le travail sur les questions d'approximation relatif aux limites dépendra du paradigme en jeu. Le paradigme de référence permet d’interpréter les contenus des composantes épistémologiques de l'ETM et, en retour, par leurs fonctions différentes dans le travail, ces composantes participent à la spécificité des différents paradigmes.

2. Deux paradigmes duaux et conflictuels : l'Analyse standard et l'Analyse non standard

Rappelons que la théorie de Kuhn s'appuie prioritairement sur l'étude de la physique, la question de savoir si elle s'applique aux mathématiques n'est d'ailleurs pas triviale et a fait l'objet de nombreuses polémiques et travaux (Gillies 1992). Pour Kuhn, les paradigmes ne peuvent cohabiter et leur lien est nécessairement conflictuel : Un paradigme nouveau tend à éliminer l'ancien alors qu'en mathématiques, les paradigmes semblent survivre et continuer à exister et ceci est particulièrement vrai dans l'institution scolaire. Dans le cas de l'analyse mathématique, les paradigmes de l'Analyse Standard (AS) et de l'Analyse Non Standard (ANS) nous semblent correspondre à la définition initiale et conflictuelle des paradigmes avec la prééminence globale du premier (AS) dans lequel s'inscrit toute l'Analyse réelle enseignée avec les différents paradigmes dont nous parlerons plus loin.

L'histoire du développement de l'Analyse, depuis l'antiquité et plus spécifiquement aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, montre un usage naturel des quantités infinitésimales pour résoudre les problèmes. Cette vision de l'Analyse a été écartée, à cause d'un problème de fondements et d'un manque de définitions précises, au profit d'un appui sans réserve sur l'ensemble *R* des réels qui fut construit dans la deuxième moitié du XIX^e^ siècle. Par la suite, l'Analyse réelle a été incorporée dans les programmes d'enseignement de la plupart des nations (Beke, 1914). C'est, dans ses principes, l'Analyse réelle telle qu'elle est enseignée actuellement. Néanmoins, dans les années 1960, les travaux de Robinson sur l'Analyse non standard ont ouvert des perspectives nouvelles en donnant un appui théorique qui manquait aux quantités infinitésimales aux débuts de l'Analyse moderne. Malgré l'enthousiasme du début des années 1990 (Hodgson 1994) et les recherches récentes de chercheurs en didactique (voir par exemple Katz et Katz, 2010), force est de constater que l'Analyse non standard n'a pas réussi à percer dans les programmes d'enseignement et ce, malgré des avantages techniques certains, peut-être parce que la construction des nombres est complexe, ou que, plus vraisemblablement, le changement de paradigme de travail est trop important pour la communauté des enseignants de mathématiques.

Il nous paraît utile de distinguer ces deux paradigmes globaux pour comprendre certaines difficultés qu'éprouvent les élèves. Ainsi, il est bien connu en didactique des mathématiques que les étudiants ont de grandes difficultés à concevoir l'égalité 0,999…=1. Cette égalité a été beaucoup étudiée (Sierpinska 1985, Tall et Scharzenberger 1978, …), notamment parce qu'elle est perçue comme un passage essentiel et élémentaire à l'Analyse. L'Analyse non standard est un outil conceptuel qui peut être mobilisé pour comprendre pourquoi des étudiants peuvent écrire, par exemple, que 1=0,999…+0,000…01 (infinité de 9 et de 0). En Analyse non-standard, il est effectivement possible de voir 0,999… et 1 comme distincts. Les étudiants peuvent tout à fait développer, contre l'enseignement traditionnel ou au moins parallèlement, des conceptions non standard des nombres (Ely 2010). Dans (Manfreda Kolar & Hodnik Čadež 2012, pp 404 et 405), à la question *what is the largest number,* un étudiant répond 99… et à la question *what number is closest to the number 0.5,* ce sont 67 étudiants qui répondent 0,4999… et trois qui répondent 0,500…1. Même si ces réponses peuvent être classées dans une conception liée à l'infini potentiel, comme le proposent ces auteurs, on pourrait tout aussi bien y voir une conception non standard des nombres. Ainsi, distinguer ces deux paradigmes de travail, ANS et AN, permet d'identifier certains malentendus entre enseignant et étudiant qui peuvent être rapprochés des malentendus liés aux paradigmes GI et GII en géométrie (Houdement et Kuzniak 1999).

Les deux paradigmes, ANS et AN, que nous venons d'identifier, se situent au niveau de l'ETM de référence et, nous pouvons affirmer que dans la grande majorité des institutions d'enseignement, de formation et même de recherche, que l'ETM de référence de l'Analyse et globalement dirigé par celui de l'Analyse Standard. Dans la suite, nous ne considérerons que les sous-paradigmes de l'Analyse standard et nous les appellerons simplement « paradigmes de l'Analyse».

3. Les trois paradigmes de l'Analyse standard (AS)

Nous avons retenu ici trois paradigmes dont on peut percevoir l'existence historique (Edwards,) et l'impact dans l'enseignement actuel.

Le paradigme [Analyse Arithmetico-géométrique] (AG) qui permet des interprétations provenant, avec quelques implicites, de la géométrie, du calcul arithmétique mais aussi du monde réel. De nombreux problèmes d'Analyse trouve leur source intuitive dans ce paradigme : calcul de longueur ou d'aires, continuité et tangence...Arithmétique et géométrie sont étroitement liées historiquement dans le développement de ce paradigme auquel il faudrait ajouter tous les problèmes de cinématique dont le rôle dans l'élaboration de l'Analyse a été fondamental.

Le paradigme [Analyse calculatoire] (AC) Dans ce calcul algébrique généralisé, les régles de calcul sont définies, plus ou moins explicitement, et elles sont appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits. Dans ce paradigme, les fonctions vont être identifiées avec leur écriture, retrouvant ainsi l'idéal perdu d'assimiler toutes les fonctions aux fonctions analytiques.

Le paradigme [Analyse Infinitésimale] (AI). Cette fois, un travail spécifique et formel s'appuie sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, travail sur des voisinages, négligeabilité... La précision des définitions associée à la rigueur des raisonnements qui ne peuvent plus s'appuyer simplement sur des évidences intuitives, souvent géométriques, marque une rupture épistémologique avec les deux précédents.

Dans la pratique de l'Analyse, de fait on assiste à une intrication des paradigmes à la fois naturelle et problématique. Comme on peut, par exemple, le constater en classe de première en France avec l'introduction, en classe de première, du nombre dérivé que l'on peut envisager sous différentes formes toutes nécessaires à une bonne compréhension de la notion.

[Paradigme AG] Pente d'une droite tangente au graphe d'une fonction, si ce graphe admet une tangente.

[Paradigme AC] Résultat d'un calcul symbolique sur des expressions algébriques

[Paradigme AI] Rapport de la variation infinitésimale de la valeur d'une fonction sur un changement infinitésimal de la variable

Toutes ces approches sont résumées dans un macro-signe qui sert d'emblème unificateur

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

mais peu compréhensible à ce niveau d'enseignement.

Cette diversité ravit l'expert et elle sera naturellement une source sans cesse renouvelée de problèmes didactiques que nous retrouverons plus loin. Elle est cependant inévitable comme nous venons de le voir sur le nombre dérivé mais aussi plus largement pour comprendre et étudier des objets de l'Analyse dont l'origine est géométrique. Par exemple, dans le TD3, une configuration géométrique donne à reconnaître un point anguleux dont on peut faire un traitement dans AG sans nécessairement utiliser les autres paradigmes mais le passage par AC et AI va permettre de donner d'autres éléments de validation.

Nous venons de voir l'importance des interactions entre paradigmes pour explorer la complexité des objets de l'Analyse. Dans cette partie, nous allons considérer deux oppositions fondamentales dans ce domaine mathématique : local/global et discret/continu. Nous les aborderons en considérant le différents jeux possibles entre paradigmes mais aussi entre les différentes genèses du modèle.

1. Les perspectives de localité : globale, locale et ponctuelle.

Avant de considérer le possible apport de la notion de construction et de déconstruction dimensionnelle (Duval 2005) à cette question, nous reprenons un exemple développé par Di Rico et al. (2015), sur une idée d'Arcavi et Hadas (2000), qui illustre l'opposition local/global. Le travail mathématique proposé par les auteurs s'appuie sur l'exploration d'une configuration géométrique grâce au logiciel de géométrie dynamique GeoGebra.

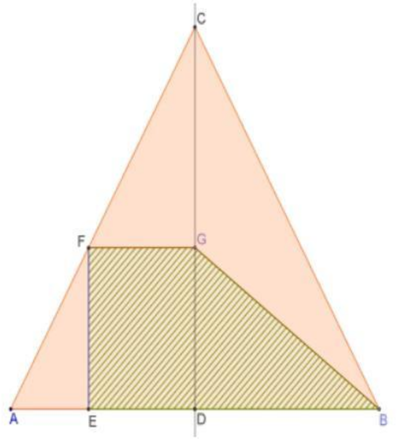	ABC est un triangle équilatéral D est le milieu de [AB] et G un point libre de [CD] Les points F et E sont sur les côtés AC et AD et dépendent de G de façon à obtenir le rectangle GFED.

Tableau 1. *Aire du trapèze*

Le logiciel va permettre d'étudier les dépendances éventuelles entre l'aire *a* du trapèze FGBE et une dimension de la figure. Di Rico et al. (2015) associent quatre « fonctions » à cette configuration et proposent de toutes les tracer sur le même graphique.

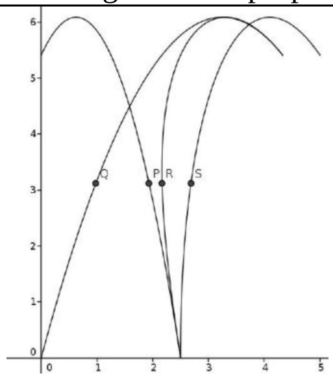 Le graphique est effectué avec c=5 pour le côté du triangle.	La variable peut être associée à un côté du trapèze *x=FG* avec le point *P (x, a)* et la fonction *p(x)* *y=FE* avec le point *Q (y, a)* et la fonction *q(y)* Elle peut être aussi une diagonale de ce trapèze comme *z=GE* avec le point *R (z, a)* et r(z), qui n'est pas une fonction. Enfin, il peut s'agir aussi d'une variable sans lien immédiat avec le trapèze comme *t= GA* avec le point *S (t, a)* et la fonction s*(t)*.

Tableau 2. *Courbes associées à l'aire du trapèze*

Le premier travail de découverte et d'exploration du graphique grâce au logiciel se situe dans le plan [Sem-Ins]. Il permet d'interpréter l'intersection de certaines courbes, notamment celle de la courbe de Q avec la courbe de P avec une perspective ponctuelle. Avec une perspective globale, on voit aussi que la courbe de R ne semble pas être une fonction. Enfin, il permet notamment de s'assurer que les courbes associées à *q* et *r,* ne sont pas tangentes en leur maximum comme une perspective globale sur le graphe le laisse supposer. Grâce à un zoom et une perspective locale, les points d'intersections sont reconnus grâce à la perspective ponctuelle, nous laissons au lecteur le plaisir d'explorer ce graphique. La question se complique quand on souhaite étudier la tangence au point d'abscisse c/2=2,5. Il est alors possible de mobiliser d'autre outils algébriques et de les utiliser dans une perspective locale pour un travail dans le paradigme de l'Analyse infinitésimale qui vient compléter celui effectué dans le paradigme algébrique. (Montoya et Vivier, 2015).

Cet exemple montre l'étroite articulation entre les différentes genèses lorsque le seul travail sur le graphique même puissamment appuyé par des outils technologiques ne suffit plus pour convaincre et qu'une genèse discursive dans ses dimension énonciative et dénominative est nécessaire (Duval 2005, p. 6) pour étendre la définition de la tangence au cas de deux courbes et ainsi lancer un travail de validation. On retrouve ici l'idée de construction et déconstruction dimensionnelle que Duval a introduit en géométrie. Dans ce cas, Duval considère que le travail de visualisation est piloté par ce qu'il appelle des déconstructions dimensionnelles qui permettent d'identifier les éléments pertinents pour reconnaître les figures mais aussi de manière essentielle pour asseoir une organisation non iconique du discours de preuve basé sur les propriétés. Ce travail est alors pleinement orienté vers le plan [Sem-Dis] avec une opposition épistémologique forte entre l'iconique et le non-iconique. Dans sa forme iconique, le travail s'appuie essentiellement sur la dimension sémiotique et non sur la dimension discursive qui sera associée au non iconique.

En Analyse, la genèse sémiotique change radicalement du fait de la nature des questions qui portent sur les graphes des fonctions : maxima, tangence, intersection de courbe. L'Analyse se distingue ainsi de la géométrie, au moins dans sa version classique, car les intersections doivent être validées localement alors qu'elles vont de soi et sont évidentes en géométrie et encore dans le paradigme AG. Ainsi, dans la construction d'Euclide d'un triangle équilatéral (Livre 1, Prop 1), l'intersection des arcs de cercle en un point ne pose pas de problème et elle a été admise sans être questionnée jusqu'au développement d'un travail sur les fondements de la géométrie. Des modes de traitement, spécifiques de l'Analyse et tributaires du paradigme utilisé, vont permettre de travailler sur la différenciation entre une perspective locale et une perspective ponctuelle. Cette perspective de « localité » suppose la coordination de différents types de traitements; un traitement global (la droite est vue dans son entier comme une ligne sans limite) ; un traitement ponctuel qui correspond au 0D de Duval et enfin un traitement local qui considère un voisinage du point étudié. Chacun de ces traitements peut impliquer une perspective singulière et autonome sur les objets concernés : perspective locale, ponctuelle et globale. Le manque de coordination de ces perspectives est une source d'appauvrissement du travail mathématique en Analyse que nous expliciterons davantage plus loin. En effet, ce point crucial a fait l'objet des travaux de Vandebrouck (2011) mais aussi de la commission Inter-Irem université.

2. La dialectique entre le discret et le continu

Cette opposition classique et fondatrice de l'Analyse moderne se manifeste de manière nouvelle et persistante avec l'usage des outils technologiques comme l'illustre l'exemple suivant basé sur des résultats donnés par un tableur.

Durand-Guerrier et Vivier (étude en cours) ont proposé cet énoncé à des étudiants de première année d'université :

Question 8

Pour étudier deux suites (u_n) et (v_n), on a entré dans un tableur :

- les nombres 3, dans la cellule A2, et 2, dans la cellule B2
- et les formules suivantes :

A3 : $\boxed{= 0.5*(A1+5/A1)}$ B3 : $\boxed{= 2+1/(2+B1)}$

Les formules rentrées en A3 et B3 ont été recopiées *vers le bas* jusque la ligne 21. On obtient un tableau de valeurs comme indiqué dans l'extrait de tableur ci-contre.

	A	B
1	*u_n*	*v_n*
2	3,000000000000	2,000000000000
3	2,333333333333	2,250000000000
4	2,238095238095	2,235294117647
5	2,236068895643	2,236111111111
6	2,236067977500	2,236065573770
7	2,236067977500	2,236068111455
8	2,236067977500	2,236067970035
9	2,236067977500	2,236067977916
10	2,236067977500	2,236067977477
11	2,236067977500	2,236067977501
12	2,236067977500	2,236067977500
13	2,236067977500	2,236067977500
14	2,236067977500	2,236067977500

Peut-on déduire de ces données que les suites (un) et (vn) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément.

Parmi 35 étudiants de première année en mathématique à l'université de Montpellier (France), 7 ne répondent pas, 12 répondent correctement (soit 1/3), 6 répondent que les suites ont même limite et 9 que les suites sont stationnaires - parmi ces deux derniers types de réponses, on note 4 mentions explicites que la limite est 2,36067977500.

On peut interpréter les quinze (6+9) dernières réponses comme des affirmations dans le paradigme AG basées presque exclusivement sur une genèse sémiotique. En outre, la perspective de localité à l'infini est absente de ces réponses.

Les 9 réponses "stationnaires" montrent une limitation dans la compréhension du nombre qui se limite, ici, à 12 décimales. On est dans une perception discrète du nombre qui ne permet pas de penser l'infinité de décimales nécessaire pour les nombres non décimaux (à noter toutefois, qu'aucun étudiant n'a enlevé les deux zéros à la fin de 2,36067977500). Le passage à un ensemble continu de nombre ne semble pas réalisé pour ces étudiants. Des étudiants affirment que "tout est égal à 2,36067977500" ou encore que « comme c'est égal à 10^{-12} près alors elles ont la même limite ».

Il semble ainsi nécessaire de reconstruire le continu à partir du discret qui peut être amorcé par la question d'une validation discursive provocant un changement de paradigmes (du moins peut-on l'espérer).

Le TD1 consacré à l'introduction de la (des) fonction(s) exponentielle(s) au lycée a approfondi cette question. D'après notre étude, il ne semble pas que la dialectique discret/continu soit prise en compte, pas de manière consciente et, en tout cas, elle ne l'est pas de manière stable. Le travail prenant en compte le discret et le continu change d'un manuel à un autre, d'une section de la classe de terminale à une autre. On relève souvent un changement d'artefact, ou l'introduction d'un artefact, quand on passe du discret au continu ou du continu au discret sans que cela soit explicite. Tout se passe comme s'il n'y avait pas d'identification d'une différence dans la nature du travail.

En TS, il s'agit de définir la fonction exponentielle comme solution de l'équation différentielle f'=f. Le discret peut apparaître alors dans la méthode d'Euler qui nécessite un contrôle et une compréhension des approximations qui peuvent faire défaut, le retour au continu est particulièrement ardu (il s'agit ni plus ni moins de la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas particulier de f'=f). Mais on relève également une juxtaposition du discret et du continu, sur des objets différents, ce que ne mentionne pas le manuel.

En TES (le point de vue est très proche de l'enseignement au Chili), il s'agit d'une extension des suites géométriques aux fonctions exponentielles, de a^n à a^x, par un passage naturel du discret au continu : il s'agit d'une extension sans accident et les élèves ne comprennent pas le travail proposé par l'enseignant pour problématiser les enjeux.

Un manuel propose même de relier les points d'abscisses entières, sans questionner ce tracé. Cette manière de procéder est présente depuis le début de l'enseignement des fonctions, pour les représentations graphiques obtenues “à la main”. La nature continue des courbes n'est pas questionnée, comme dans l'usage naturel du TVI, et elle ne l'est jamais dans tout le cursus du secondaire, sans doute parce que le continu des nombres réels est absent de l'enseignement secondaire. Or, cette nature continue des courbes apparaît lorsque l'on veut introduire la fonction exponentielle en expliquant son existence avec les programmes en vigueur. C'est peut-être la seule fonction du lycée qui nécessite cela.

3. La circulation dans le modèle

L'étude de la circulation entre les genèses et les paradigmes a été illustrée dans le deuxième TD consacré à l'introduction d'une fonction de densité associée à un histogramme rendant compte des éruptions d'un volcan japonais pendant plusieurs siècles. Les données obtenues permettent de tracer un histogramme correspondant à un ensemble fini de valeurs et la question est de savoir si l'on peut expliquer ce phénomène par une loi de probabilité dont la forme indiquera s'il est sans mémoire ou non.

L'évolution du travail pendant la séance est mise en évidence par une suite de diagrammes dont le schéma suivant rend compte :

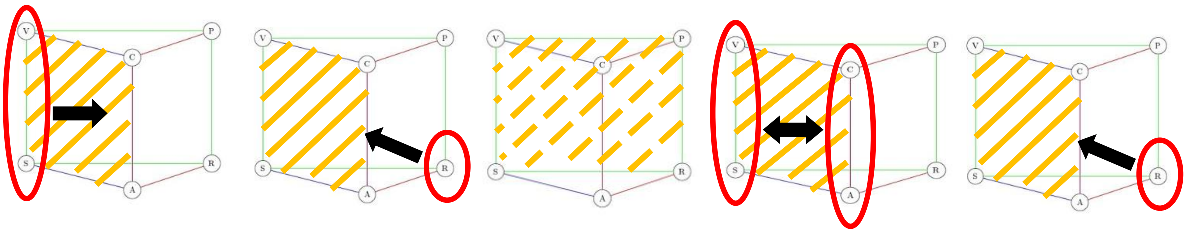

Figure 2. *Evolution du travail mathématique au cours de la séance (voir TD2)*

De manière globale, le cheminement qui apparaît dans ce schéma récapitulatif montre ce que nous appellerons un travail mathématique complet dans la mesure où toutes les dimensions et tous les plans du travail sont activés, à un moment ou un aurre, au cours de l'activité. Notre étude donne naissance à plusieurs questions que la recherche doit envisager :

1. L'analyse montre que le professeur prend complètement en charge certains changements dans l'évolution du travail : il assure ainsi tout le travail de preuve dans le plan [Sem-Dis], il gère seul le logiciel évitant ainsi tous les problèmes d'instrumentation. Peut-on alors encore parler de travail complet pour l'élève ?

2. Comment alors planifier les différentes phases de l'enseignement pour s'assurer d'un travail complet de la part de l'élève en situation d'autonomie.

3. De quelle manière peut-on s'assurer qu'un travail complet dans l'ETM idoine produit bien bien un travail complet de la part de l'élève ?

1. Introduction : De l'étude des ETM partiels et de l'ETM des fonctions en particulier

Comme nous l'avons signalé, la rencontre avec l'Analyse passe d'abord par la fréquentation d'une certain nombre d'objets spécifiques dont certains sont déjà familiers aux élèves, comme les fonctions, et d'autres sont nouveaux comme les suites. Ces objets sont nombreux et particulièrement complexes à appréhender dans leur globalité : nombres réels, limites, dérivées, intégrales etc. Et de fait, l'institution scolaire favorise la mise en place de formes de travail qui se structurent à l'intérieur d'ETM dédiés à des objets spécifiques plus qu'à l'Analyse dans son ensemble : $ETM_{Fonctions}$, ETM_{Suites}, chacun pouvant lui-même être divisé en ETM particuliers associés par exemple à la proportionnalité, aux fonctions quadratiques…

La relation de ces ETM partiels à un ETM général et englobant est un problème classique mais encore mal résolu de la didactique des mathématiques : comment rendre compte du général à partir de l'étude de cas particuliers. On peut tenter de viser l'exhaustivité dans la description de l'ensemble des situations qui nourrissent les ETM étudiés mais il est aussi possible en sélectionnant certaines activités caractéristiques de viser un ETM spécifique particulier qui sera une bonne image de l'ETM dans sa globalité.

2. Autour de l'étude des fonctions

Dans cette section, nous considérons principalement le travail mathématique qui se développe autour de l'étude des fonctions. Cet ETM partiel sur les fonctions est un exemple emblématique de la façon dont s'organise au fil de la scolarité l'ETM de l'Analyse entre trois formes de travail qui semblent plus se juxtaposer que se compléter. Nous étudierons aussi les conséquences d'un travail partiel dans la dimension sémiotique qui conduit à ne pas suffisamment préparer le nécessaire jeu entre les différentes perspectives de localité : perspectives globale, locale et ponctuelle.

2.1 Une forme de travail F1 associée au paradigme AG

Tout d'abord, de la fin du collège jusqu'au début de la classe de première S, les élèves sont censés développer une forme de travail F1 dans le paradigme AG. Les représentations sémiotiques des fonctions (notamment les tableaux de variations, les graphiques et les formules algébriques) sont multiples et manipulées sans qu'une importance particulière soit donnée aux formules algébriques. L'enjeu d'apprentissage semble être que les élèves conceptualisent les fonctions en tant qu'objet global en coordonnant les divers registres de représentations et en reliant les fonctions à d'autres domaines mathématiques, comme la géométrie, ou non, comme la physique, l'économie... Il y a ainsi un développement des activités de modélisation intra et extra mathématiques avec un appui souhaité sur des artefacts technologiques comme les logiciels de géométrie dynamique ou les tableurs notamment.

Ce travail d'exploration et de découverte débouche sur l'énonciation d'un certain nombre de propriétés soit globales comme les notions de parité, de périodicité, de croissance ou comme les notions d'extremum global (maximum ou minimum). Les recherches d'images, d'antécédent, de solutions d'équations favorisent l'approche ponctuelle. Les propriétés sont également travaillées dans différents registres de représentation sémiotique au sens de Duval. Dans le même temps, les variations globales de fonctions polynômes de degré 2, de la fonction inverse, et dans une moindre mesure de fonctions homographiques, sont étudiées et ces fonctions doivent acquérir un statut de fonctions de références.

Des inéquations sont résolues, à la fois algébriquement et graphiquement, avec des notions de continuité et le Théorème des Valeurs Intermédiaires en acte qui font partie implicitement du référentiel théorique : la continuité va de soi et il n'y a pas de jeu entre le discret et le continu. Par contre, on peut interpréter le travail de traitement des représentations graphiques comme destiné à favoriser l'articulation entre les perspectives de localité : perspective ponctuelle et perspective globale sur les fonctions. Le gain d'un tel effort doit se faire sentir par des tâches de comparaisons de fonctions ou par les propriétés à mettre en jeu dès lors qu'est utilisée une classification des fonctions : linéaires, affines, quadratiques, polynomiales, inverses, homographiques.

2.2 Une forme de travail F2 ,associée au paradigme AC, très algébrisée et qui devient dominante en fin de lycée,

Dès la classe de seconde (mais surtout à partir de la première S) et jusqu'à l'université où il est complexifié, il se développe une deuxième forme de travail F2, associée au paradigme AC et juxtaposée à la forme F1. Comme le notent Coppé et al. (2007), le registre algébrique déjà important pour l'étude des fonctions dans les manuels de seconde (de 30% à 58% des exercices selon un manuel de seconde) devient prédominant dans les manuels de première et de terminale scientifique.

Des notions locales sont progressivement introduites : limite, continuité, dérivabilité, la dernière étant d'ailleurs introduite dans les programmes de première scientifique avant la notion de limite. Ces notions locales sont en fait principalement mobilisées dans des exercices où les fonctions sont représentées et représentables par une formule algébrique, en général polynomiale puis mêlant exponentielles et logarithmes en terminale. Les recherches de limites sont traitées par des calculs algébriques et les démarches de minoration, majoration et encadrement avec des fonctions de références, qui avaient été introduites dans les programmes dans les années 80, ont quasiment disparu. Il n'y a plus de définition opérationnelle du concept de limite et une approche intuitive de la notion de limite apparaît.

Au niveau du baccalauréat, Coppé et al. (2007) notent qu'il existe toujours une forte algébrisation de techniques pour l'étude des fonctions, basées sur des règles de calcul algébriques (calculs de limites, de dérivées, étude des variations de fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes…), qui renforcent les pratiques algébriques. Les questions portent sur des études globales mais sont algébrisées. En particulier, les fonctions sont toujours dérivables globalement et la variation est étudiée à partir du signe de la dérivée, ce qui ramène des propriétés globales à des propriétés ponctuelles universelles et masque le caractère global de ces propriétés. Le théorème et l'inégalité des accroissements finis, qui étaient des outils permettant des encadrements et des majorations globales, critiqués parce que stéréotypant les sujets de baccalauréat, ont disparu des programmes. Les questions ponctuelles (résolutions d'équations ou intersections de graphes) sont traitées algébriquement et le graphique ne sert encore qu'à conforter les résultats algébriques, ce qui réduit son rôle à un rôle de contrôle. Les problèmes locaux (limites, continuité, dérivabilité en un point) sont encapsulés dans des procédures algébriques. Le taux de variation d'une fonction peut-être explicitement demandé à des élèves de terminale mais l'idée de son calcul n'est pas supposée disponible spontanément quand elle est judicieuse.

2.3 Une forme F3 intégrée dans l'Analyse classique, en début de l'université, avec l'émergence du paradigme AI

La troisième forme de travail F3 s'engage dès le début de l'université, notamment dans les cours magistraux et les démonstrations menées dans les TD sous l'impulsion du professeur. Il s'agit d'une première découverte du paradigmes AI dans une Analyse non algébrisée avec de nouvelle règles comme les règles de quantifications qui deviennent ici impératives. Le changement de paradigme suppose des techniques nouvelles et des approches différentes de celles utilisées dans le paradigme AC : techniques de la majoration, de la minoration et de l'encadrement, du jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires avec pour beaucoup une perspective locale sur les fonctions. Ce nouveau fonctionnement ne doit pas pour autant sacrifier les techniques classiques du paradigme AC comme les démarches algébriques simplificatrices avec l'algèbre des limites qui doit rester toujours présente dans le travail des élèves

Des tâches nouvelles faisant appel à des expressions comme « proche de » ou « de plus en plus proche », ne peuvent pas être traitées sans recours aux quantificateurs dans le traitement des expressions algébriques. Les fondements de cette forme de travail F3 associée au paradigme AI sont ceux de la complétude de *R*, généralement admise sous l'une des trois formes suivantes : la convergence des suites croissantes majorées, la convergence des suites adjacentes ou la convergence des suites de Cauchy. Le premier théorème d'Analyse locale, concernant l'image d'une suite convergente par une fonction continue, est démontré en cours magistral. Sa démonstration nécessite le recours à la quantification et aux définitions précises des notions de convergence et de continuité. Ensuite vient le travail sur les fonctions négligeables, les fonctions équivalentes, les développements limités et les formules de Taylor qui ont un caractère global (formule de Taylor Lagrange ou formule de Taylor avec reste intégrale) ou un caractère local (formule de Taylor Young).

2.4 Le jeu brisé des perspectives globales, locales et ponctuelles.

Ces différentes formes de travail F1, F2 et F3 sont intégrées dans des ETM idoines dont des études didactiques de Gagatsis et Monoyiou (2011) et Vandebrouck (2011) ont montré qu'ils aboutissaient dans les faits à développer un travail mathématique très compartimenté et ne prenant pas en compte le travail de décomposition et recomposition dimensionnelle dont nous avons montré l'importance pour accéder à un travail riche et complet en Analyse mathématique. Ce point est particulièrement sensible quand on prend comme fil conducteur de l'analyse les dialectiques possibles entre les trois perspectives de localité : globale, locale et ponctuelle.

Dès la seconde, où pourtant le travail F1 associé au paradigme AG est censé promouvoir un travail riche sur les différentes représentations sémiotiques notamment graphiques, diverses études montrent que l'impact sur le travail mathématique personnel des élèves reste restreint du fait de l'insuffisance des ETM idoines effectivement mis en place. Ainsi, Bloch (2003) met en évidence le fait que les élèves n'exploitent que rarement la puissance du graphique au niveau global. Elle fait des propositions pour des séquences d'enseignement en seconde, supportées par la perspective globale dans le registre graphique. Elle pointe le travail au niveau local qui pourrait déjà être engagé avec F1. Bridoux et al. (2015) notent également les difficultés pour les élèves à accéder à la complexité de la représentation graphique des fonctions et à la visualisation globale. Les élèves savent interpréter beaucoup de propriétés sur les graphiques mais elles ne sont pas associées à une représentation graphique de fonction. Enfin, dans son travail, Maschietto (2001) met aussi en évidence l'importance que pourraient avoir les représentations graphiques comme outils pour entrer dans des tâches d'Analyse locale dès la classe de première S. Notre hypothèse est que l'ETM des fonctions paraît privilégier rapidement un travail algébrique où tout le « relief » (Robert, 2008) que l'enseignement était censé donner à la notion de fonction avec la première forme de travail F1 est masqué : en particulier les deux perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions ne sont plus mises en valeur sous F2, étant donné l'insuffisance et l'aspect réducteur de la représentation algébrique vis-à-vis de ces perspectives.

Les représentations graphiques permettent seulement d'illustrer les notions et quelques propriétés dont les preuves ne sont pas assumées. Selon Bloch (2002),

> « Cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport entre graphiques et fonctions supposé transparent : les élèves sont supposés voir dans le dessin graphique ce qu'y voit le professeur ».

Compte tenu de la difficulté d'accès à la perspective globale sur les fonctions, cette perspective ne peut effectivement pas aller de soi pour les élèves.

Finalement, avec une forme de travail algébrique F2, assez isolée de la forme de travail F1, l'enseignement secondaire contribue à ne développer que le paradigme AC en privilégiant un référentiel algébrique et en masquant le travail de décompositions et de recompositions dimensionnelles, naturel dans AG, qui passent par les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions. La perspective locale qui préparerait l'entrée dans le paradigme AI est également évacuée dans les programmes, les manuels et les pratiques. Ainsi, confrontés à la forme F3 mise en place à l'université, les élèves, devenus étudiants, ne pourront pas facilement passer du ponctuel au global et vice versa et ainsi entrer aisément dans les règles du paradigme AI qui nécessite un jeu entre les deux perspectives globale et locale. Par exemple, le calcul algébrique de la limite d'une expression complexe nécessite une mise en perspective locale pour repérer les termes prépondérants et les termes négligeables de l'expression manipulée. Hors des situations algébrisées, les fonctions seront considérées au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Dans les situations algébrisées, les objets manipulés restent très formels, sans les différentes perspectives sous-jacentes.

3. Une situation paradigmatique

Nous allons illustrer certaines des difficultés énoncées précédemment à partir de l'étude d'une situation de modélisation intra-mathématique qui implique un changement de domaine mathématique pour être résolue : la question est posée en géométrie et sa solution prend appui sur l'étude d'une fonction qui rend compte des variations d'une aire en fonction d'une longueur. La fonction est visualisée dans le registre graphique grâce notamment à l'usage d'un logiciel polyvalent tel que GeoGebra. En France, au niveau du lycée, l'accent est mis sur ce type de problèmes qui rendent les procédures et notions graphiques et numériques inadéquates pour modéliser et traiter des situations internes aux mathématiques aussi bien qu'externes (physique, chimie, biologie, économie,…).

Nous commençons par une explicitation du travail autour de la visualisation qui implique une mise en œuvre de la genèse sémiotique. Puis, cette situation nous permet de mettre en évidence une contradiction entre le travail de l'élève et celui que voudrait le professeur : une des raisons essentielles du blocage est cette fois le statut de la genèse instrumentale. Enfin, nous examinons une proposition alternative de travail sur cette question jouant sur la diversité des environnements matériels.

La situation dont il s'agit, a été étudiée par Robert et Vandebrouk (2014).

> *ABCD* est un carré. *E* est un point sur *[DC]* et *DEFG* est un carré (*F* est à l'intérieur du carré). On cherche un point *E* tel que la somme des aires *DEFG* et *FBA* soit minimale.
>
> 1. Faire une figure avec le logiciel.
> 2. Explorer la figure et conjecturer la position de E
> 3. Prouver le résultat obtenu de manière algébrique en posant $x=DE$ et en calculant la somme des aires « comme une fonction de x »

Dans ce scénario, l'enseignant attend que les élèves explorent la figure avec le mode « Trace » puis qu'ils émettent une conjecture sur la position d'un point *K* d'abscisse *x* parcourant la courbe ainsi obtenue.

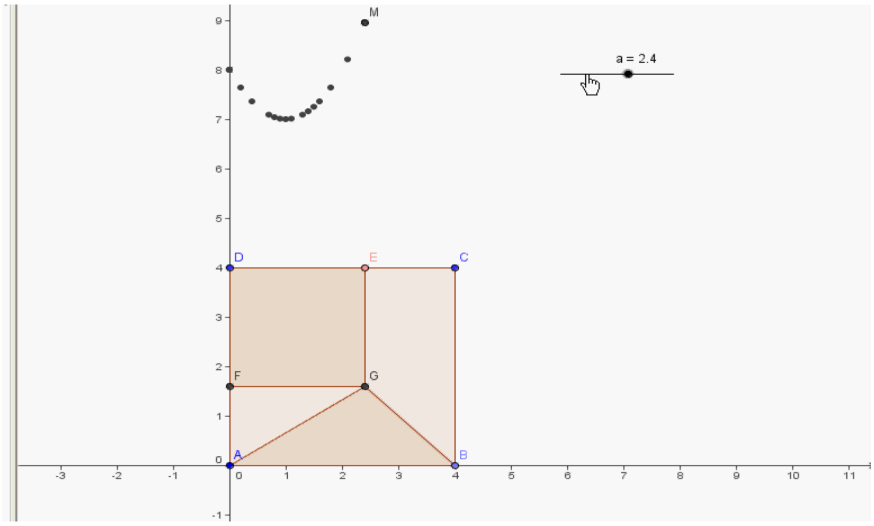

Figure 3. *La figure tracée avec le logiciel*

Puis dans un deuxième temps, l'activité est consacrée à l'étude de la fonction obtenue. Il s'agit d'un polynôme de degré 2, dont les élèves ne peuvent trouver le minimum à ce niveau de la scolarité que grâce à une « astuce » de calcul algébrique consistant à faire apparaître la forme canonique du trinôme.

L'activité est lancée dans la forme de travail F1. Elle s'appuie sur le paradigme AG et mobilise dans un premier temps le registre graphique dont l'usage est favorisé par l'emploi d'un logiciel. Ce travail d'exploration dans le plan [Sem-Ins] des ETM doit permettre aux élèves d'émettre une conjecture. Ensuite, pour prouver cette conjecture, l'activité bascule dans le domaine algébrique avec l'usage d'une technique algébrique temporaire qui disparaîtra en classe de première avec la découverte et l'usage des dérivées dans le paradigme AC.

De manière assez classique dans ce type d'activité mobilisant un logiciel, certains élèves se perdent dans cette partie instrumentale d'autres parviennent à trouver le résultat. Tous restent perplexes devant le changement de forme de travail et l'expression algébrique demandée et ils suivent alors obligeamment le professeur qui assume seul la validation dans le paradigme AC de la conjecture.

Commentant la situation Lagrange et Minh (2016) affirment ironiquement :

> We observe that weak students simply do not understand the task, while high achieving students succeed but do not see a real purpose.

Il y a donc nécessité d'aller au-delà de ce constat et de proposer une meilleure articulation entre ces différentes formes de travail qui renvoient, de fait, à des paradigmes très différents pour l'élève et dont il est nécessaire que le professeur facilite l'articulation. Pour cela Lagrange et Minh (2016) proposent une mise en œuvre en trois phases qui utilisent les différents environnements que permet le logiciel Casyopée. Chacun de ces environnements peut être vu comme un ETM particulier articulé autour d'un artefact déterminé.

1. Développement de l’activité dans le domaine géométrique (AG). Il s'agit de consolider la conjecture en travaillant avec un logiciel de géométrie. Les auteurs insistent sur la nécessité de clarifier la construction en distinguant bien les points fixes et les points dépendants.Ce point est fondamental dans l'approche de la pensée fonctionnelle puisqu'il introduit la question de la covariation. Cette dernière est systématiquement négligée dans l'ETM idoine français et, de ce fait, la forme de travail F1 n'assure pas une entrée satisfaisante dans la pensée fonctionnelle ce qui devrait être le premier objectif du jeu entre les divers registres de représentation. En général, le travail mis en œuvre dans ce type d'activité apparaît comme

essentiellement statique avec une perte de l'idée de variation qui suppose d'identifier précisément les éléments fixes et les éléments variables.

2. Assumer un questionnement et une discussion sur la modélisation de la situation géométrique pour favoriser un passage aux fonctions vues comme l'expression de la covariation entre variables dépendantes [Ins-Dis]. Les mesures fournies par le logiciel sont utilisées pour décrire les fonctions.

3. Argumenter sur les propriétés de la fonction elle-même à partir du graphique de façon à développer une « approche coordonnée » (Gagatsis et Monoyiou, 2013) entre les registres graphique et algébrique de façon à faciliter une « visualisation heuristique » et ainsi l'articulation entre la dimension sémiotique et la dimension discursive dans [Sem-Dis].

Dans leur recherche, Lagrange et Minh montrent l'intérêt d'un logiciel comme Casyopée avec une interface spécifique intermédiaire entre géométrie et algèbre pour structurer et rendre explicite les différents changements de registres et de domaines mathématiques (Kuzniak 2014, Montoya et Vivier 2014).

4. Lycée et université : deux ETM idoines en rupture

Nos recherches rejoignent les constatations qui ont pu être faites par d'autres chercheurs sur la transition problématique de l'enseignement de l'Analyse entre le lycée et l'université.

Au lycée, malgré des situations introductives de découverte et d'exploration dans le plan [Sem-Ins] s'appuyant sur le paradigme AG, le travail est relativement homogène dans le paradigme AC. Du fait d'un manque d'un travail spécifique sur les perspectives de localité (globale, ponctuelle et locale), les différentes genèses apparaissent comme étant déconnectées avec la difficulté de donner un sens à certaines reconstructions instrumentales et, surtout, à initier des preuves non iconique et discursive s'appuyant sur des propriétés clairement identifiées. La centration sur le paradigme AC entraîne un appauvrissement du jeu possible sur les différentes représentations sémiotiques. Cet appauvrissement du jeu sémiotique se double d'une forte routinisation des techniques algébriques qui limite l'initiative des élèves et donne une conception erronée du travail mathématique en Analyse. Ce dernier semble se réduire à une algèbre particulière.

A l'université, cette fois l'accent est mis sur la validation discursive étayée par un référentiel théorique important. Ainsi, c'est plutôt le plan [Sem-Dis] qui est activé avec l'introduction du paradigme AI qui n'a pas été préparé au lycée. Il faut aussi souligner la quasi-disparition des calculatrices graphiques qui rend difficile le recours aux représentations graphiques quand elles ne sont pas déjà disponibles chez les élèves. Le travail mathématique souhaité s'appuie sur un jeu entre les différentes perspectives de localité, sur un traitement complexe des représentations symboliques formelles qui suppose un transfert du même type d'activité sur les représentations algébriques. Il faut aussi noter la relative pauvreté du travail spécifique de routinisation sur les techniques de calcul.

Cette forte séparation entre les deux ETM mis en place au lycée et à l'université a des conséquences sur les ETM personnels d'étudiants à l'entrée à l'université comme le montrent les études, notamment celles de la commission Inter-Irem université.

- L'ETM personnel d'une majorité des étudiants est piloté par le paradigme AC avec une approche algébrique des fonctions. Cette forme de travail permet tout de même d'envisager un certain travail symbolique et formel.
- On note aussi une forte réussite aux tests sur les limites de suites ou fonctions quand des règles algébriques s'appliquent mais ce travail algébrique apparaît sans flexibilité.
- Les étudiants ont peu de possibilités pour adopter des perspectives de localité (ponctuelle, globale ou locale) sur des représentations algébriques notamment quand les règles habituelles ne s'appliquent pas.

- Certains étudiants semblent, cependant, avoir développé une « approche coordonnée » des fonctions entre les registres algébrique et graphique.

CONCLUSION

Dans cette conclusion, nous revenons sur les points qui nous apparaissent les plus novateurs dans notre approche du travail mathématique en Analyse à travers l'usage du modèle des ETM.

Identifier le travail mathématique à travers le jeu des paradigmes

L'identification des paradigmes qui guident le travail en analyse est une première étape nécessaire pour caractériser les ETM. Nous avons retenu trois paradigmes qui apportent des points de vue différents mais non contradictoires sur les objets de l'analyse. Le premier AG (Analyse arithmético-géométrique) est nécessaire pour développer l'intuition nécessaire au travail dans les deux autres. De manière naturelle, ce paradigme assure une première dialectique entre les diverses perspectives de localité et entre le discret et le continu qui va permettre ensuite d'entrer dans l'Analyse mathématique avancée.

Le paradigme AC (Analyse calculatoire) est nécessaire pour associer un monde de calculs et d'écritures symboliques bien spécifique aux objets de l'Analyse. Ce passage par le symbolisme induit un déplacement graduel du point de vue géométrique ou arithmétique vers la notion abstraite de fonction associée à des ensembles de nombres.

Enfin, le paradigme AI (Analyse infinitésimale) est d'une certaine façon le paradigme visé dans la perspective des mathématiques avancées. Les démonstrations s'appuient sur un formalisme important qui redéfinit en profondeur les objets et les méthodes.

Parallèles avec la géométrie

De manière parallèle aux études faites en didactique de la géométrie, nous avons utilisé ces trois paradigmes pour mettre en évidence une dialectique entre AG-AC au lycée qui ressemble à la dialectique entre GI-GII au collège dans la mesure où le paradigme AG est inachevé et ne permet pas un travail de preuve standard basé sur un référentiel théorique très structuré. Enfin le paradigme AI doit permettre un approfondissement des questions étudiées qui n'a de sens qu'après un travail préalable dans les deux paradigmes précédents de la même façon qu'une entrée directe en GIII était vide de sens pour les élèves.

Pour comprendre le travail particulier de visualisation associé à la genèse sémiotique, nous avons retenu l'idée de construction et de déconstruction introduite par Duval pour préciser la rupture épistémologique existant entre les preuves iconiques et non iconiques. Dans le cadre de l'Analyse, un type de déconstruction/construction (globale, locale et ponctuelle) peut être mis en parallèles avec les décomposition dimensionnelles de type 1D, 2D ou 3D.

Les ETM idoines existant dans le secondaire et dans le supérieur

Le diagramme des ETM permet de dégager des formes de travail associées à des circulations bien spécifiques et caractéristiques et ainsi de montrer que les ETM de l'Analyse au lycée et à l'université sont très compartimentés, sans connexion explicite, autour de paradigmes différents (AG puis AC au lycée ; AI à l'université)

De plus, nos études montrent une dynamique du travail (au sens des ETM) relativement faible car il y a peu de mise en relation entre les différentes genèses. Ainsi, au lycée, on assiste à un confinement dans le plan [Sem-Ins] soit par un travail sur les logiciels, souvent gérés par le professeur, ou la calculatrice, soit par un travail sur les techniques algébriques routinisées. Par contraste, à l'université, le plan [Sem-Dis] est privilégié par les enseignants qui laissent souvent le travail de routinisation et d'exploration de côté. De ce fait, ces formes de travail, utiles pour entrer dans l'Analyse avancée et favoriser l'articulation avec l'ETM du lycée, sont laissées à la charge des étudiants.

Au-delà du constat...

Nos observations sur le compartimentage des ETM et sur l'absence d'un travail complet avec mobilisation de toutes les composantes du travail mathématique passent relativement inaperçues dans les évaluations institutionnelles car si le travail de l'élève, surtout en fin de lycée, peut sembler être plutôt technique, il est de fait bien adapté aux examens comme le baccalauréat.

Cependant, de manière volontariste, il nous paraît possible d'aller au-delà de ce constat pour essayer de transformer le travail en jouant de manière consciente sur les différents paradigmes, en développant un travail plus varié sur les différentes genèses pouvant prendre appui notamment sur les différentes perspectives de localité. Du point de vue de la recherche, il reste ainsi beaucoup à faire au niveau de l'étude et du développement de ces formes de travail. Cette étude pourra aussi se nourrir de recherches comparatives avec d'autres systèmes d'enseignement comme celui que nous étudions au Chili. Nos observations montrent une prise en compte très différente des paradigmes AG et AC notamment, puisque le travail au lycée est essentiellement un travail d'exploration très fortement appuyé sur les représentations graphiques et les logiciels utilisés par les élèves. Les deux paradigmes sont développés de manière relativement équilibrée en laissant de côté les notions de dérivées et d'intégrales qui ne sont abordées qu'à l'université.

Nos recherches s'orientent également sur l'usage plus systématique des méthodes développées dans le cadre des théories de l'activité pour décrire l'impact sur les ETM des tâches prescrites et des activités réalisées. En effet, comme nous l'avons indiqué, les Espaces de Travail Mathématique peuvent être vus comme une structure d'accueil des activités mathématiques, structure en évolution constante du fait même du développement, ou non, de certaines formes d'activités dans le cadre scolaire.

REFERENCES

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 25-45.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 98(1), 40-55.

Bloch, I. (2002). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x, 58,* 25-46.

Bloch (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. Educational Studies in Mathematics, 52, 3–28.

Bridoux, S., Chappet-Pariès, M., Grenier-Boley, N., Hache, C. & Robert, A. (2015) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, cahier du LDAR numéro 14, juillet 2015

Coppé, S., Dorier, J.-L., Yavuz, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde, *Recherche en Didactique des Mathématiques, 27* (2), 151–186.

Coutat, S. & Richard P.R. (2011). Les figures dynamiques dans une espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de Didactique et de sciences cognitives.* 16, 97-126

Di Rico, E., Lamela, C., Luna, P. & Sessa, C. (2015). Figuras dinámicas y funciones representaciones vinculadas en la pantalla de Geogebra, Proceedings of CIAEM XIV, 5-7 june

2015, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie *Annales de Didactique et de sciences cognitives.* 10, 5-54

Ely, R. (2010). Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 117-146.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics. 3, 413-435.*

Gagatsis, A. & Monoyiou, A. (2013). Les stratégies des futurs instituteurs dans la résolution de tâches sur les fonctions. Approche ponctuelle ou approche coordonnée ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 18* 115-137.

Gillies, D. (1992). *Revolutions in Mathematics*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press,

Hacking, I. (2014). *Why is there philosohy of mathematics at all ?* Cambridge: Cambridge University Press.

Hodgson, B.R. (1994). Le calcul infinitésimal, In : D.F. Robitaille, D.H. Wheeler et C. Kieran, dir., *Choix de conférence du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-7),* Presses de l'Université Laval, 157-170.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Formation des maîtres et paradigmes géometriques. *Recherches en didactique des mathématiques. 20-1,*

Katz, K., & Katz, M. (2010). Zooming in on infinitesimal 1 − .9.. in a post-triumvirate era, *Educational Studies in Mathematics*, 74, 259-273.

Kuhn, T.S. (1966). *The structure of scientific revolutions,,* 2nd ed. Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. (2014). Travail mathématique et domaines mathématiques. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 17 (4.2), 385-399

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Spaces for Mathematical Work : Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4.1), 17-26.

Lagrange, JB. & Minh T. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. ZDM, *Article en révision*

Legrand, M. (1990) Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9-3, 365-406*

Manfreda Kolar, V., & Hodnik Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 80, 389-412.

Maschietto, M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d’analyse à l’Université. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 21 (1.2), 123-156

Mithalal, J. (2014). Initier un processus de preuve mathématique dans un environnement de géometrie 3D. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(2), 343-360

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19, 73-101.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces as an analyzing tool for the teaching and learning of calculus, ZDM, *Article en révision*.

Robert A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l’analyse des pratiques d’enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Éd.), La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants (pp. 45-68). Toulouse : Octarès.

Robert, A. & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34, 2-3.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

Thurston, William P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society* 30: 161-177.

Tall, D. O. & Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.

Vandebrouck, F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 16, 149-185.